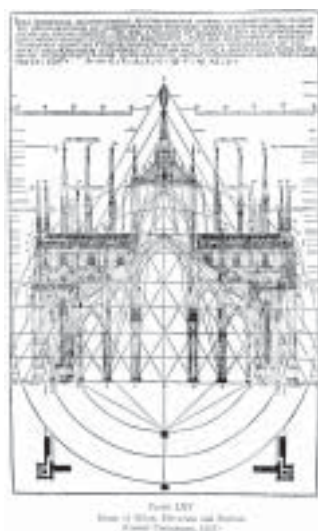


A regra da proporção

Gaudi disse “A base de todo raciocínio é a regra de três, a proporção matemática, o silogismo. O homem deve recorrer a essas maneiras; primeiro supõe o conhecimento de uma coisa para depois encontrar outra que nos sirva de base firme. Primeiro se avança um pé para depois avançar o outro” (Conversaciones con Gaudi- Cesar Martinell). A ferramenta mínima da matemática é a regra de três, isto é para resolvermos todos nossos problemas de matemática, precisamos de uma única ferramenta, tudo que existe a mais são sub rotinas, são mecanismos que quando aplicados equivalem a centenas de aplicações da regra de três.



A regra de três é a regra da proporção, da harmonia, por esta razão os grandes construtores de antigamente eram sempre artistas, eles entendiam de proporção e conseguiram construir grandes pontes, templos, etc. A regra de três diz que se conhecemos três elementos, pela proporção entre eles, conheceremos o quarto que é desconhecido.

A regra de três é a regra da proporção, da harmonia, por esta razão os grandes construtores de antigamente eram sempre artistas, eles entendiam de proporção e conseguiram construir grandes pontes, templos, etc. A regra de três diz que se conhecemos três elementos, pela proporção entre eles, conheceremos o quarto que é desconhecido.

Assim :

Sabemos que 1 m³ de concreto pesa 2500 kg, quanto pesará 2 m³ de concreto?

x kg de concreto está para 2500 kg de concreto, assim como 2 m³ está para 1 m³, para encontrar a solução multiplicamos 2 por 2500 e dividimos por 1.

A regra de três, é a regra da proporção, que relaciona grandezas diretamente e inversamente proporcionais, quanto maior a quantidade de concreto e quanto maior for seu peso maior será o resultado e se 2 m³ de concreto pesassem os 2500 kg menor seria o resultado final.

Um dos casos mais importantes de proporção é o da “**DIVINA PROPORÇÃO**”:

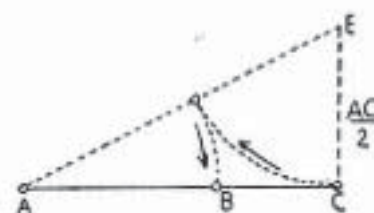
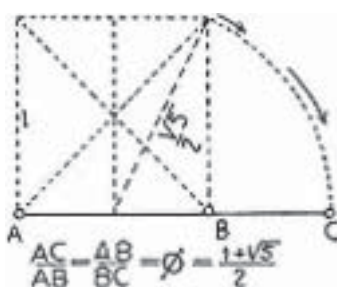
a está para **b** assim como **b**

está para **c**, que pode ser representada por um segmento dividido em duas partes de tal forma que o segmento total está para o maior pedaço assim como este está para o menor pedaço, que é chamada também de seção áurea

Ou seja $(1+\sqrt{5})/2$ está para 1 assim como 1 está para $(1-\sqrt{5})/2$ que dá aproximadamente

$$1,618 / 1 = 1 / 0,618$$

Os gregos foram encontrando repetidamente na natureza e na geometria essa proporção, daí a batizaram com o nome de DIVINA, por exemplo , a altura do chão ao nosso umbigo divide nossa altura nessa proporção, a diagonal de um



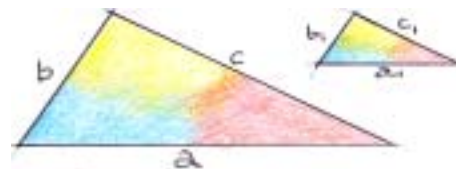
pentágono e seu lado seguem essa proporção.

Fibonacci (1175-1250) idealizou uma seqüência de números: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89... (o próximo é a soma dos dois anteriores) que está intimamente relacionada com a regra de crescimento na natureza. A divisão entre dois números da seqüência tende à divina proporção, por exemplo dividindo-se 89 por 55 temos 1,618..., dividindo-se 55 por 89 temos 0,6179...

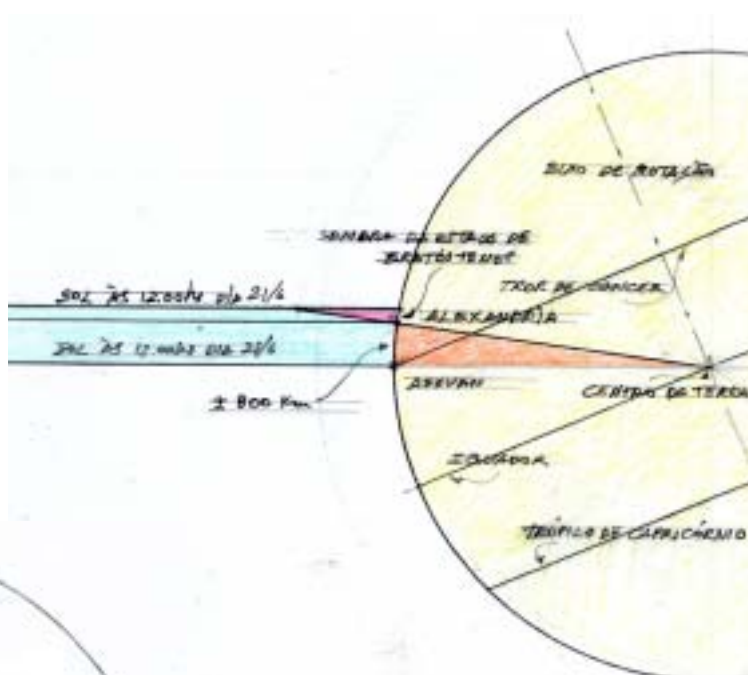
Além da regra de três, para resolver os problemas estruturais precisamos conhecer as relações matemáticas dos triângulos, tais como semelhanças entre triângulos:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

Dois triângulos são semelhantes quando tem ângulos iguais, e seus lados serão proporcionais entre si.



Eratostenes (200 AC) calculou o diâmetro da Terra com bastante precisão, usando as relações de **semelhança de triângulos**. A história conta que Eratóstenes morava em Alexandria no Egito e soubera através de relatos de viajantes que no dia 21 de junho ao meio dia, o sol iluminava o fundo dos poços em Assuan, cidade que ficava a 800 km ao sul de Alexandria. Como em nenhum dia ou hora do ano os raios de sol iluminam o fundo dos poços em Alexandria, nesse dia Eratóstenes colocou uma estaca perpendicular ao chão e mediu sua sombra ao meio dia, concluindo que o raio da Terra estava para a altura de sua estaca assim como a distância entre as duas cidades estão para o tamanho da sombra da estaca.



Outra solução interessante por

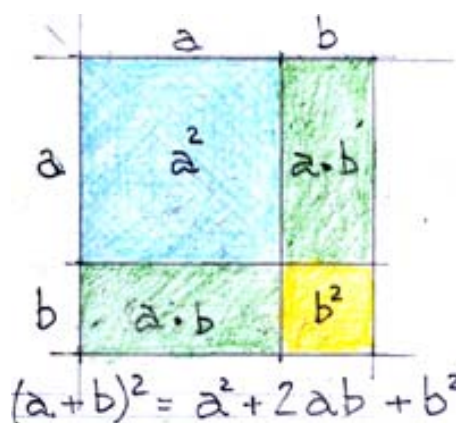


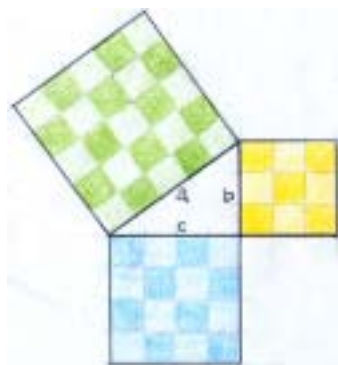
semelhança de triângulos , é a extração de raiz quadrada graficamente:

Marcamos numa reta o número que queremos extrair a raiz quadrada e acrescentamos uma unidade. Traçamos um semi círculo, com o centro sobre a reta e levantamos uma perpendicular entre a unidade e o número, e construímos assim dois triângulos que são semelhantes, pois os dois são triângulos retângulos e a soma de ângulos dos dois triângulos perfaz 90°.

Então, a unidade / raiz quadrada = raiz quadrada / número que queremos extrair a raiz quadrada.

Podemos ver claramente no desenho ao lado por que





$(a+b)^2$ tem como resultado $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Todas as estruturas são construídas com triângulos, o triângulo é a unidade mínima das estruturas, com eles podemos desenhar, construir e calcular toda e qualquer estrutura.

Todos os polígonos podem ser divididos em dois ou mais triângulos e todos os triângulos podem ser divididos em pelo menos dois triângulos retângulos.

Por esse motivo é que a trigonometria é tão importante para a gente.

Como todos os triângulos retângulos podem ser construídos dentro de uma semi-circunferência, adotando-se um diâmetro como hipotenusa, e o terceiro vértice ocupando algum ponto da própria circunferência, podemos sempre determinar o tamanho dos catetos em relação à hipotenusa e os outros dois ângulos internos.

O esquema clássico dessa relação que define o que é o seno, co-seno, tangente, etc, é o de uma circunferência com raio igual à hipotenusa ou igual a 1 para obtermos números para essas relações:

O seno é a medida vertical, o co-seno a horizontal, a 45° são iguais, e simetricamente a partir daí os valores invertidamente se repetem.

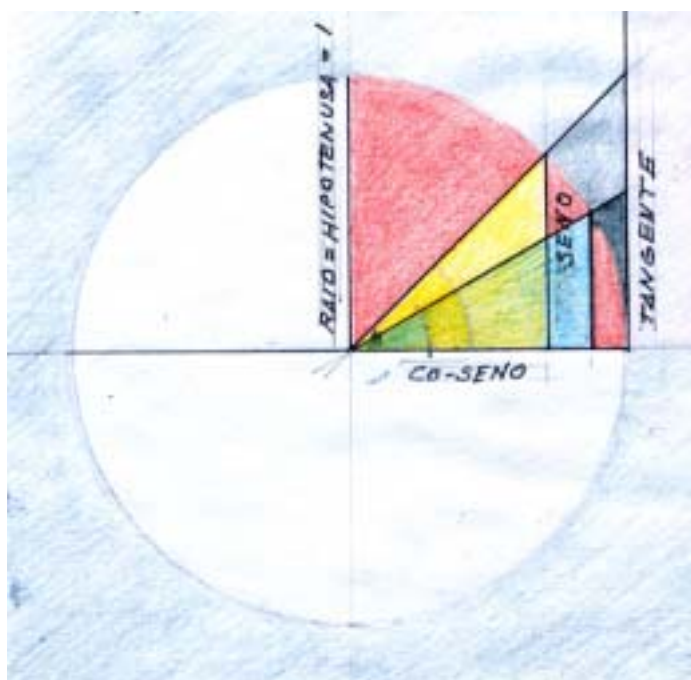
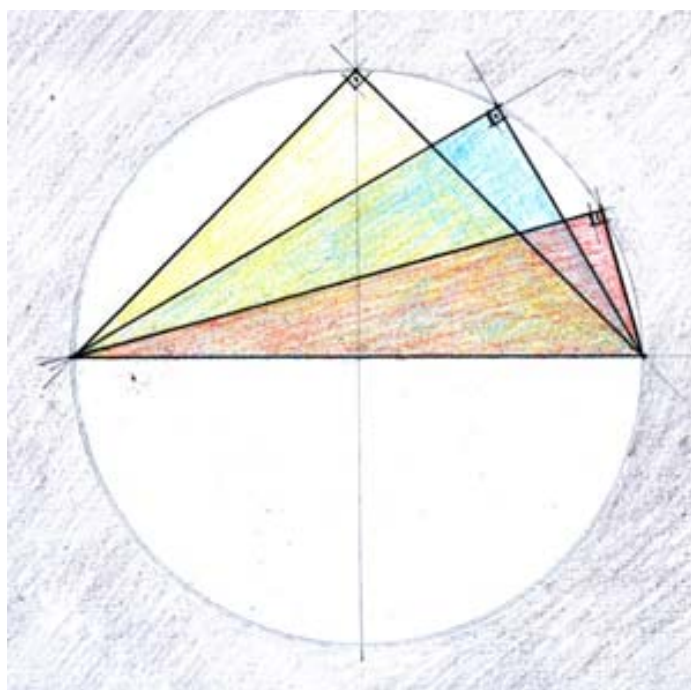
A tangente é a divisão do seno pelo co-seno, também aparece graficamente como o segmento que tangencia a circunferência que vai do eixo horizontal até encontrar o prolongamento da hipotenusa.

Para que possamos trabalhar bem com triângulos e proporções, é importante termos bem claro como funcionam as operações.

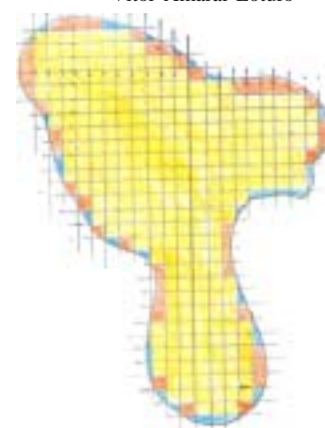
Existem duas operações somar e diminuir, ou podemos dizer que existe só uma somar positivamente e negativamente.

As operações de multiplicação e divisão podem ser entendidas como sub-rotinas da operação principal, isto é quando multiplicamos fazemos várias operações de soma ao mesmo tempo e a divisão é fazer várias operações de diminuição ao mesmo tempo.

Podemos associar também as operações ao movimento, por exemplo um número é um valor fixo no tempo e no espaço, ou seja um ponto sem movimento, quando ao invés de um número temos uma variável (x

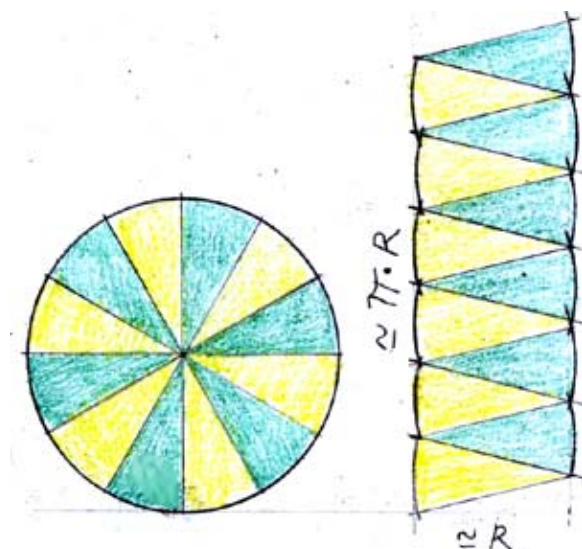


), temos um ponto se deslocando no espaço, representado por uma linha, quando multiplicamos uma variável por outra associamos um movimento com um outro movimento no espaço, e assim por diante. Com a técnica da integração e da derivação, conseguimos avançar um movimento ou diminuir um movimento com uma equação inteira.



Arquimedes

Arquimedes viveu em Siracusa (Sicilia-Itália) quando esta pertencia à Magna Grécia e foi o primeiro a calcular a área de um perímetro irregular, a área de um círculo, a superfície e o volume de uma esfera, de um cone, de um parabolóide, o valor de π etc.



Para obter esses resultados utilizou a técnica de retalhar o objeto de cálculo em pedacinhos pequenos, quanto menores maior a precisão.

Para calcular π Arquimedes dividiu o círculo em setores e empilhou-os como no desenho ao lado e percebeu que aumentando o número de divisões iria obter um retângulo medindo Raio por π vezes o Raio, ou πR^2

Não se apavore quando tiver de aplicar uma fórmula, as fórmulas são seqüências de proporções onde existem comparações diretamente proporcionais (tudo o que está em cima na comparação) e comparações inversamente proporcionais (tudo o que está em baixo).

O triângulo como peça fundamental das estruturas

Vamos construir um triângulo com três tábuas, colocando um prego em cada vértice e podemos verificar que o triângulo é uma figura estável, não se deforma sem se romper.

Pregando uma quarta tábua, verificamos que resulta um quadrilátero instável, com cinco, seis ou mais tábuas ficará mais instável ainda.

Se colocarmos uma tábua como diagonal do quadrilátero, ele ficará estável, porque temos dois triângulos formando o quadrilátero. Ficarão estável também se colocarmos dois pregos num dos vértices porque com esse novo prego construímos dois triângulos formados por esses dois pregos mais os dos vértices adjacentes.

Nosso problema de estabilidade não termina por aí. Se colocarmos o triângulo em pé ele cairá para algum dos lados, isso porque toda e qualquer estrutura é um objeto tridimensional, logo nosso objeto estrutural mínimo será um tetraedro que é uma figura espacial formada por quatro triângulos.

Para facilitar a compreensão das estruturas vamos estudar as peças estruturais nos três planos das três dimensões, um de cada vez (xy , xz , yz), isto é vamos examinar primeiro o plano vertical frontal ou longitudinal o vão e a altura estrutural, depois o plano vertical lateral as dimensões transversais da estrutura e finalmente o plano horizontal.

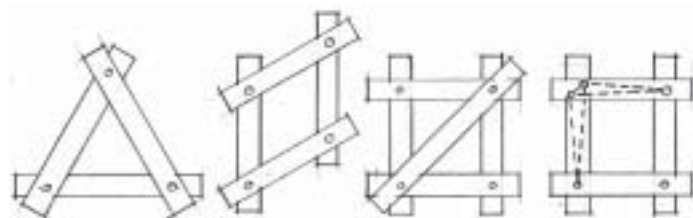
As forças são representadas por vetores, para somá-los e dividi-los usamos o método do paralelogramo, a resultante ou a força a ser dividida é uma das diagonais do paralelogramo e divide este em dois triângulos com lados iguais.

Quando somamos duas forças, obtemos **uma resultante** que é equivalente aquelas duas e sempre podemos dividir uma força qualquer em duas outras quaisquer, respeitando a regra do paralelogramo, as

duas forças resultantes são equivalentes à primeira.

A definição de força é massa vezes aceleração, então é correto anotar kgf que no caso de pesos representa massa vezes a aceleração da gravidade.

Começaremos então pelo triângulo que contém o plano do vão principal



O problema estrutural mais típico é vencer um determinado vão, por exemplo cobrir um espaço, construir uma ponte etc. Então vamos começar por aí:

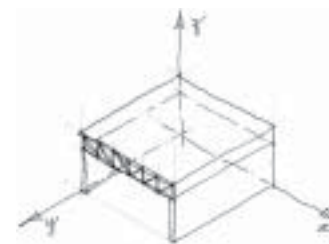
A pretensão é construir um pequeno modelo utilizando uma corda e uma vara de bambú, e mostrar que toda e qualquer estrutura que existe no mundo terá um comporta-

mento igual, e o problema só fica mais complexo quando precisamos encontrar onde que supostamente estarão a corda e o bambú dentro de uma viga de concreto armado.

Vamos amarrar uma corda entre duas árvores. As árvores são os apoios ou pilares e a corda vai vencer o vão entre essas árvores. Ao dependurarmos pesos na corda verificamos que sua forma vai se alterando conforme a posição e o valor dos pesos.



A corda como é flexível, altera sua forma, porque não resiste a esforços de compressão, somente os de tração, então ela acaba assumindo a forma da resultante que é chamada também “funicular” (do latim *funiculum* ou cordão).



Primeiramente vamos colocar um peso de 100 kg bem no meio da corda, verificamos que o peso puxou para baixo a corda.

Os 100 kg se dividem em duas forças T^1 e T^2 , que esticam a corda e esta não se movimenta por que está presa às árvores então, a corda descarrega T^1 e T^2 nas árvores.



Vamos decompor essas forças em forças horizontais e verticais, inclusive as da decomposição do peso de 100 kg. Esta última decomposição estamos fazendo para dramatizar que T^1 e T^2 são responsáveis por uma parte do peso, no caso a metade e por forças ho-

rizontais H^1 e H^2 que atuam no ponto da corda exatamente onde se encontra dependurado o peso.

A soma das verticais V^1 e V^2 sempre será igual aos 100 kg. Neste caso particular em que o peso está justamente no meio elas são iguais, mas se o peso de 100 kg estiver fora do centro elas não serão iguais; porém as horizontais serão sempre iguais, pois se não forem iguais, a corda não ficaria parada, estaria se movimentando.

Repare que as horizontais junto às árvores apontam para dentro denotando compressão entre elas e as do meio da corda apontam para fora denotando tração.

Tendo entendido como funciona a estrutura, podemos calculá-la que é o ato de atribuir quantidades de força para as peças componentes da estrutura, para depois dimensioná-la, que é escolher materiais e quantificá-los para que aguentem as forças encontradas. Notem que qualquer procedimento de cálculo e dimensionamento é precedido pelo projeto, que no caso é a corda amarrada a duas árvores num determi-

nado comprimento que produz uma dada flecha.

Cálculo da estrutura

Para calcularmos essa estrutura, ou a corda, devemos:

1- Somar o valor dos pesos que dependuramos na corda e o peso da própria corda, teremos então, o valor total das forças verticais que atuam nessa estrutura. Neste caso vamos desprezar o peso próprio da corda, então o total será os 100 kgf.

2- Medir os ângulos que as pontas da corda formam com os apoios (as árvores). Pois esses ângulos é que determinarão os valores das forças T^1 e T^2 , que decompostas determinam as horizontais que as árvores devem resistir. A soma das forças verticais dos dois apoios será sempre igual ao total de peso na estrutura, calculado no item 1.

Sabemos também que as forças horizontais são iguais e contrárias (a mesma força horizontal que a parte esquerda da corda aplica na árvore, a da direita também aplica com sentido contrário na outra árvore).

3- Marcamos as duas forças horizontais, o tamanho não importa pois desconhecemos o valor, basta que sejam de mesmo tamanho. A partir daí marcamos os paralelogramos de forças, e obtemos assim os tamanhos das forças verticais que chegam nas árvores. Neste caso como o peso está centralizado (a corda chega com o mesmo ângulo nas duas árvores), as forças verticais obtidas tem o mesmo tamanho.

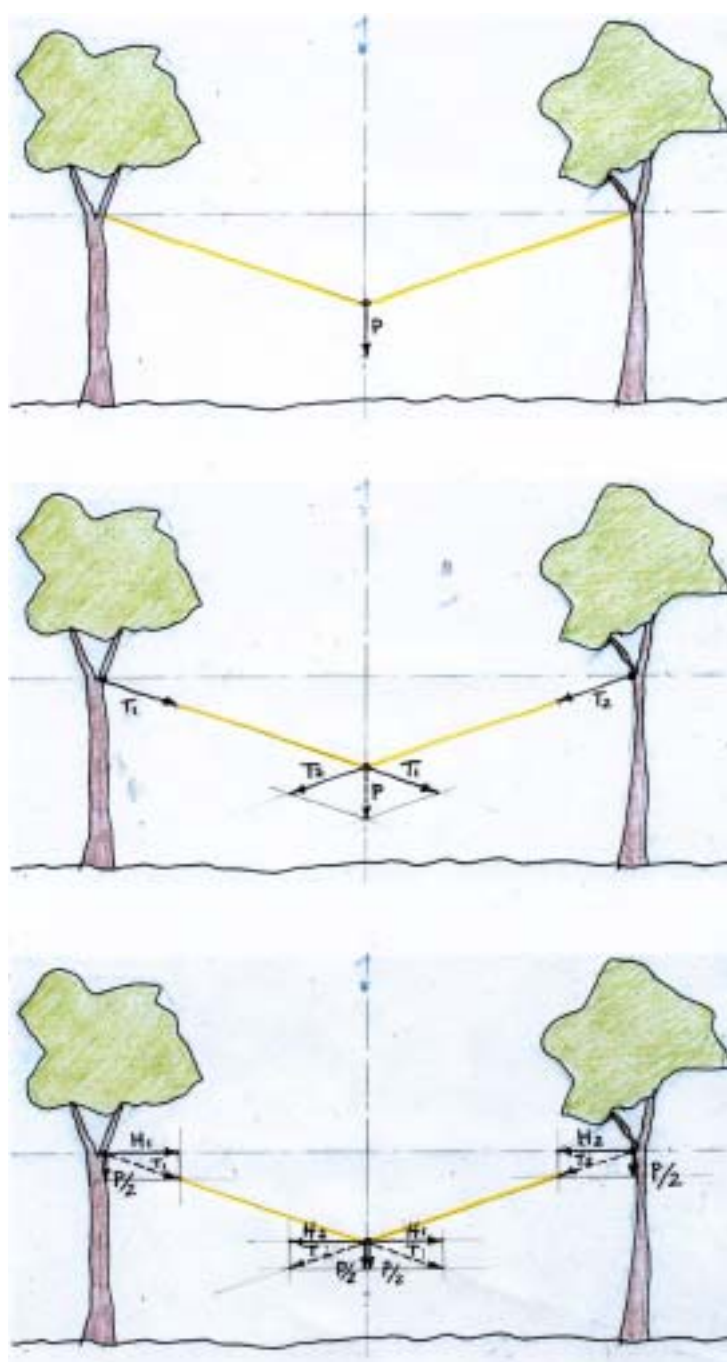
4- Sabemos o valor total das forças verticais (1) e sabemos que este valor é igual a soma do tamanho das duas verticais encontradas .

Para determinar o valor das forças que atuam na estrutura vamos comparar dois triângulos semelhantes.

Um desses triângulos é o triângulo de forças H^1 , T^1 e $P/2$ do qual só conhecemos $P/2$, o outro triângulo é um triângulo semelhante ao primeiro, do qual conhecemos as medidas, no caso é o abc, sendo que neste caso **a** é a medida da metade do vão e **b** é a **altura estrutural**, que é a distância entre o binário de forças de tração, isto é entre as horizontais que tracionam e as horizontais que comprimem. Agora é aplicar regra de três:

H^1 está para **a** assim como $P/2$ está para **b** e para descobrir T^1 basta descobrir **c** por Pitágoras e comparar com T^1 .

Podemos também resolver tudo



por desenho, basta atribuir uma escala para a força conhecida que é P e depois comparar seu comprimento com as demais forças.

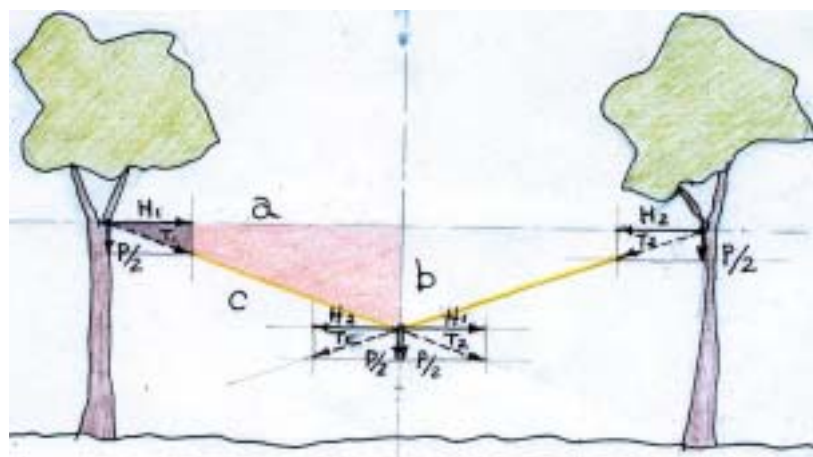
Para exemplificar vamos considerar que o vão entre as árvores é de 10 metros, portanto a é igual a 5 metros e a altura estrutural b é de 1,75 metros então,

$$H^1 = 5 \text{ m} \times 50 \text{ kg} / 1,75 \text{ m} \text{ que dará } 142,86 \text{ kg} \text{ e } T^1 = 151,35 \text{ kg} \text{ pois } (T^1)^2 = (H^1)^2 + (P/2)^2$$

Dimensionamento da estrutura

Depois de encontradas as forças que atuam na estrutura, passamos ao dimensionamento que é verificar que dimensões os materiais construtivos precisam ter. Para isso precisamos de dados sobre os materiais que estamos utilizando, e que geralmente são fornecidos pelos institutos de pesquisa.

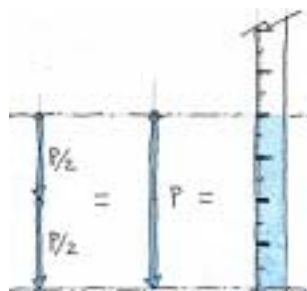
Quando se atribue um determinado valor para a resistência de um material, não é o valor médio de



ruptura desse material, porque estaríamos aceitando que grande parte das estruturas pudessem ruir; esse valor deve ser um dado seguro, por exemplo a madeira Peroba Rosa deve resistir a uma força de 85 kg/cm² no sentido de seu eixo longitudinal, provavelmente para rompermos uma peça dessa madeira precisaremos imprimir uma força muito maior.

Repare que a maior força que a corda precisa resistir é justamente T^1 e T^2 ou 151,35 kg.

Após consultarmos uma tabela de cordas, encontramos a corda de sisal de 1/4 de polegada de diâmetro que aguenta 140 kg, então concluímos que ela não é suficiente para aguentar os 151,35 kg de força, então ou colocamos duas cordas de 1/4" ou escolhemos a seguinte mais grossa que é a de 5/16" de diâmetro que suporta até 225 kg.



Vamos fazer o mesmo exercício com o peso

descentralizado:

Agora temos dois triângulos geométricos e dois de forças.

Sabemos que

$$P^1 + P^2 = 100 \text{ kg e}$$

P^1 está para b (altura estrutural) assim como H^1 está para a^1 , então

$$P^1 = 1,75 \text{ m} \times H^1 / 2 \text{ m, ou seja}$$

$$P^1 = 0,875 \times H^1 \text{ e}$$

$$P^2 = 1,75 \text{ m} \times H^2 / 8 \text{ m ou seja}$$

$$P^2 = 0,21875 H^2.$$

Como H^1 é igual a H^2 e dividindo-se P^1 por P^2 temos $P^1=4 \times P^2$,

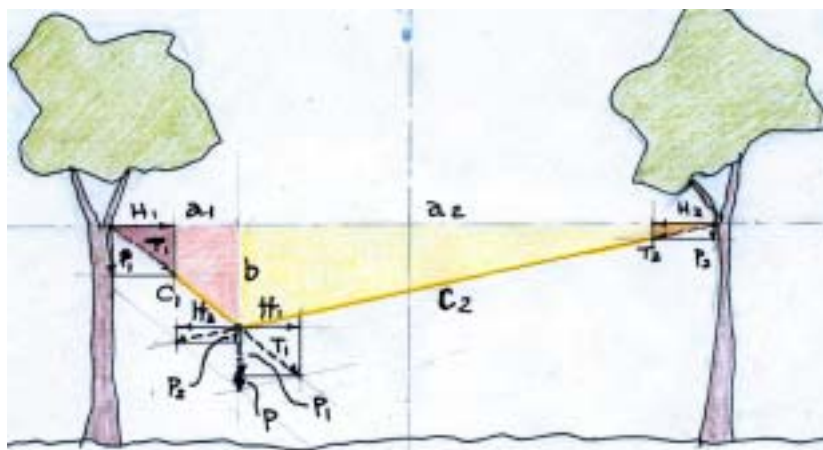
como $P^1 + P^2 = 100 \text{ kg}$,

$$P^1 = 80 \text{ kg e } P^2 = 20 \text{ kg}$$

Sabendo-se P^1 e P^2 , comparamos os triângulos como fizemos no caso anterior.

H^1 está para 2 m assim como 80 kg está para 1,75 m

$H^1 = 91,43 \text{ kg}$, portanto T^1 que é a maior força que a corda tem de aguentar vale 121,49 kg.



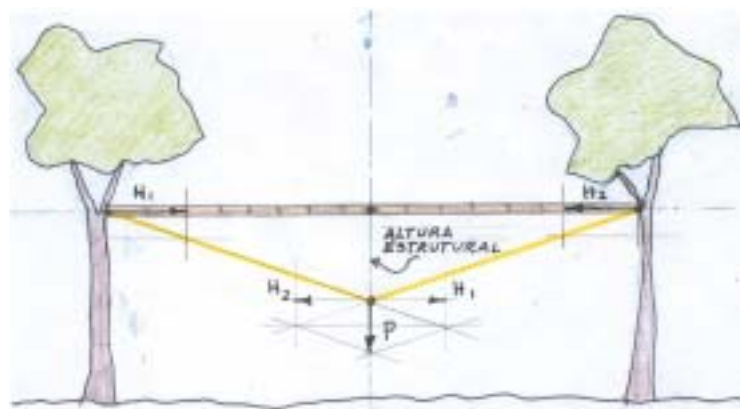
Agora podemos usar a corda de 1/4" de diâmetro, pois ela aguenta 140 kg.

Sistemas autoportantes

Um sistema autoportante é um conjunto estrutural estável por si próprio, por exemplo quase a totalidade de nossos objetos são autoportantes, pois não dependem de algo fora deles para que mantenham a sua integridade.

Este sistema estrutural formado somente pela corda não é um sistema **autoportante**, pois descarrega nos apoios além das forças verticais também as horizontais, e se as árvores forem retiradas esse sistema não tem condições de se autosustentar.

Para transforma-lo num sistema autoportante, podemos colocar uma barra na horizontal (por exemplo uma vara de bambu).



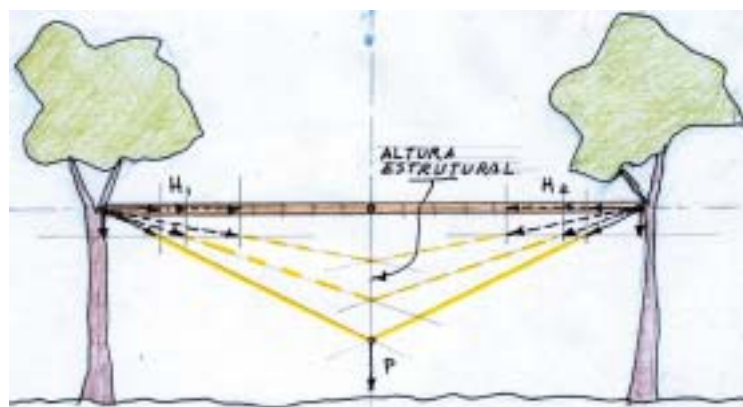
A corda deve ser amarrada nas pontas do bambu, e este ficará apoiado nas árvores, mas sem transmitir as forças horizontais para as árvores, o bambu é que se encarregará delas, ficando as árvores somente com a função de transmitir as forças verticais para o solo.

Agora fica bem claro que entre os apoios da corda há compressão e quem vai suportar as forças de compressão será o bambu, e a altura estrutural a ser considerada é a distância entre o eixo do bambu, pois a corda comprime toda a seção

do bambu, mas devemos considerar o eixo pois é por onde passa a resultante de compressão, e na parte

tracionada que é a corda também devemos considerar o eixo da corda.

Repare que quanto mais esticarmos a corda, diminuimos a altura estrutural e as forças horizontais e



obíquas vão ficando maiores, e quanto mais solta a corda, a altura estrutural irá aumentar e as forças vão diminuir (as forças verticais não se alteram).

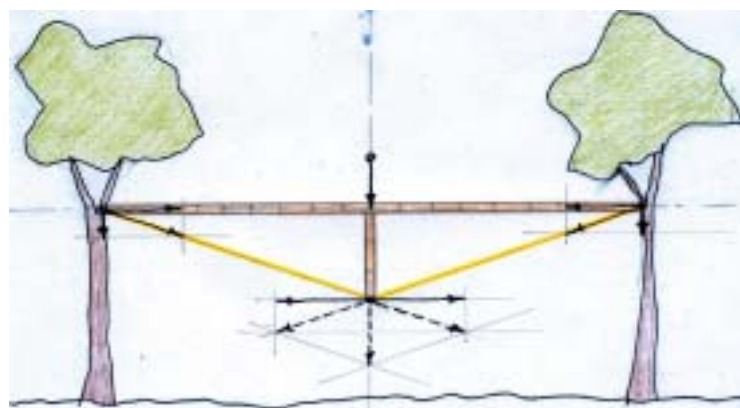
Chamamos de altura estrutural a distância máxima entre as forças horizontais. Neste caso entre as horizontais de compressão no eixo do bambu e as de tração no eixo da parte mais baixa da corda onde o peso está dependurado.

Viga Vagão

Esse conjunto corda bambu, é chamado também de viga vagão, é assim chamada por ser bastante usada nos vagões de trem e inclusive em carrocerias de caminhões e em telhados.

Nesse conjunto corda bambu, só devemos colocar cargas somente na corda, pois ela consegue transportar cargas verticais para os apoios, se colocarmos pesos sobre o bambu, ele passará a trabalhar à **flexão**, isto é a mesma peça o bambu, trabalhará à tração e à compressão, ele sozinho constituirá uma viga autoportante, não transmitindo carga nenhuma à corda.

A desvantagem disso é que no bambu, uma parte fará o mesmo papel que faz a corda, isto é



carregar pesos para os apoios e como a altura estrutural do próprio bambu é pequena, o ângulo que a “corda” interna do bambu chegará aos apoios, será com uma inclinação muito aguda resultando em forças horizontais e obíquas muito grandes.

Se quisermos colocar pesos diretamente sobre o bambu, basta colocarmos apoios sob estes pesos de forma a que estes os descarreguem sobre a corda.

Quando vamos desenhar e resolver o paralelogramo de forças numa viga,

é importante considerarmos que as resultantes das forças percorrem o eixo das peças estruturais, então no exemplo a força de compressão que percorre a peça de bambu deve ser presumida atuando no eixo longitudinal da peça e a força de tração percorre o eixo da corda, salvo se houver excentricidade na posição de alguma força.

Existe uma forma ideal para a curvatura da corda, é a curva resultante ou funicular.

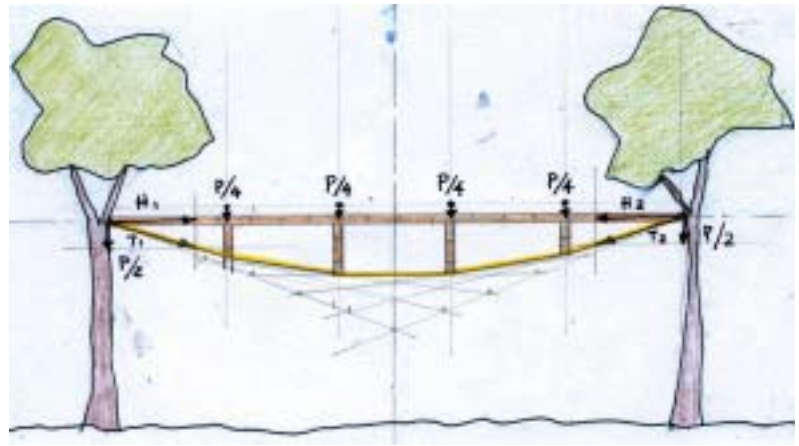
Para sabermos qual é esta forma, basta construirmos um modelo em escala, a corda pode ser representada por um fio leve e os pesos não precisam estar na escala, basta que sejam iguais entre si, caso houvesse um peso maior bastaria que este fosse proporcional aos outros. As distâncias entre os pesos devem ser proporcionais às medidas reais.

Caso a distribuição dos pesos seja uniforme ao longo da horizontal, a curva que a corda vai desenhar será uma parábola pois a equação $y = x^2$ é justamente a equação de uma curva (y) desenhada para valores distribuídos ao longo de uma linha (x).

Então conforme a distribuição típica das cargas já podemos antever que tipo de curva será a ideal como resultante. Como vimos se a carga for concentrada, a forma da curva funicular será a de um

triângulo, se for distribuída ao longo da horizontal será uma parábola, se for ao longo da própria funicular será uma catenária, catena em latim quer dizer corrente, então a catenária é a curva natural desenhada pelas correntes, desde que estejam suportando só o próprio peso ou pesos distribuídos ao longo de sua curva.

No exemplo ao lado a viga vagão recebe os 100 kg distribuídos linearmente em quatro partes de 25 kg cada, a curva ideal desenhada pela corda será a de uma parábola, que pode ser facilmente desenhada, adotando-se no meio o dobro da altura estrutural, marca-se um ponto a partir daí une-se aos pontos de apoio e divide-se cada uma das retas que são também tangentes à parábola junto aos apoios em quantas partes se queira e une-se cada parte de um lado com a do outro lado, unindo-se a 1° de um lado com a última do outro e assim por diante.



Observe que mesmo tendo diminuído a altura estrutural, em função da carga ser distribuída as horizontais continuaram do mesmo tamanho que no caso anterior.

Ao olharmos a viga vagão de lado ou em corte podemos perceber que quando as cargas estavam aplicadas sobre a corda, apesar de sua exígua dimensão, tínhamos uma situação estável pois se alguma força agisse lateralmente, a tendência é da corda voltar para a situação primitiva; mas quando a carga está apoiada no bambu, e houver alguma força lateral, o bambu poderá se deslocar para o lado, empurrando a corda para o outro, pondo em risco a estrutura, neste caso o ideal seria termos um triângulo estrutural também nesse plano, perpendicular ao eixo da estrutura principal.

Isso acontece pela diferença característica entre as forças de tração e de compressão.

Apesar de podemos considerar que a força de compressão é a que se forma à frente de um corpo em movimento e a de tração é a que se forma atrás, e que são iguais com sinais opostos, na verdade como atuação tem características bem diferentes.

A força de tração faz com que o que está sendo tracionado procure a trajetória da direção da tração, enquanto que a de compressão procura afastar o que está sendo comprimido de sua trajetória. Esta característica das forças de compressão vai provocar o que se chama **FLAMBAGEM**.

Para resistir à flambagem será preciso existir uma dimensão estrutural no plano perpendicular ao eixo da força.

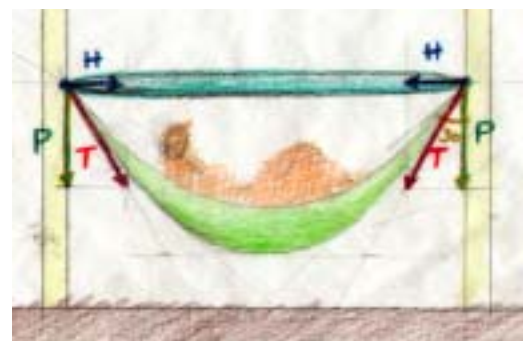
É por isso que podemos deitar numa rede, podemos nos balançar em segurança, mas subir, ficar em pé numa rede será perigoso.

Aprendendo estrutura deitado numa rede

Já que falamos em rede, vamos calculá-la e dimensioná-la.

Os ganchos que seguram a rede estão no mesmo nível, e a pessoa que está na rede está bem no meio e pesa 100 Kg. Esse peso vai caminhar pela rede, até os ganchos nas paredes.

A direção das forças que a rede vai descarregar nos ganchos será exatamente a da tangente da curva que a rede faz no ponto em que a rede entra em contato com os gan-



chos.

A grandeza dessas forças tangentes será maior quanto mais esticada estiver a rede (quanto maior for o ângulo entre a rede e a parede), pois a força peso (força vertical) que a rede descarrega em cada gancho vai ser igual a 50 Kg (metade do peso para cada lado), não depende da inclinação da rede ao chegar no gancho, será exatamente a metade do peso total que atua sobre a rede em virtude de considerarmos a carga bem no meio da rede e, os ganchos nivelados.



Para sabermos quanto vale H e T , basta desenharmos na escala (com os ângulos certinhos), ou medir o ângulo de chegada da rede (o ângulo formado pela tangente à rede exatamente no ponto onde ela descarrega a força no gancho, que no nosso exemplo é de 30° .

tangente de 30° é H/P e vale 0.577 então $H = 50 \text{ kg} \times 0.577$ ou seja $H = 28.87 \text{ kg}$ e $T = 50 \text{ kg} / \cos 30^\circ$ ou seja $T = 57.74 \text{ kg}$

Chegamos então a conclusão que a parede tem de aguentar a força de aproximadamente 29 Kg na horizontal, e de 50kg na vertical.

A rede tem de resistir à força T que é de aproximadamente 58 kg.

Vamos supor que essa parede é fraca e não podemos descarregar forças horizontais, ela somente aguenta forças verticais, Para isso vamos colocar uma barra na horizontal entre os ganchos, essa barra tem de resistir a força de 29 Kg (de compressão) que é a componente horizontal.



Antes de colocarmos essa barra horizontal, as paredes fazem parte da estrutura destinada a vencer o vão conjuntamente com a rede, quando colocamos a barra, a função da parede passa a ser de simplesmente fornecer a reação vertical. Repetindo, ao colocarmos uma barra horizontal para absorver as forças horizontais, essa barra conjuntamente com a rede forma um conjunto estrutural autoportante

Vamos chamar então esta estrutura autoportante, capaz de vencer um vão, de:

CICLO ESTRUTURAL.

É lógico que a rede sem a barra também forma um ciclo estrutural, mas à este ciclo pertencem as paredes, as fundações, e o solo, que vão resistir às forças horizontais da rede que as estão puxando para dentro, isto é, a rede sem a barra horizontal precisa das paredes para formar um ciclo estrutural.

Então, um ciclo estrutural é formado por um conjunto de forças de compressão e de tração. Para que esse conjunto esteja estável é preciso que as forças de tração e de compressão tenham o mesmo valor. Um ciclo estrutural estará então sempre em equilíbrio, e estará sempre descarregando forças em outros ciclos estruturais.

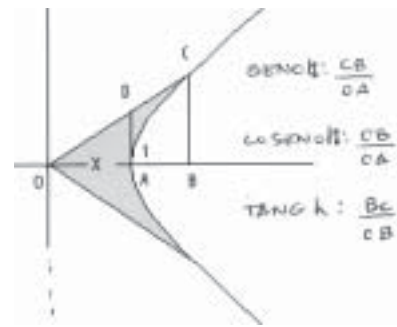
Observe que as forças indicadas no desenho, as que passam pela rede, pela parede ou pela barra, são sempre as resultantes das forças que percorrem sua seção, e sempre passando pelo eixo de atuação dessa resultante.

Mais uma coisa: Se a pessoa que estiver na rede estiver sentada bem no meio dela, a rede assumirá uma forma mais triangular e se a pessoa estiver deitada, essa forma vai ser arredondada. A forma da rede vai variar conforme a distribuição do peso sobre ela, então, os elementos estruturais flexíveis assumem formas adequadas a resistir melhor as cargas a que estão submetidos, assumem a forma da resultante funicular.

Catenária

Como dissemos anteriormente, a corda sem carregar nenhum outro peso que não seja o próprio, vai desenvolver uma curvatura característica que se chama catenária, é a curva natural da resultante de cargas distribuídas ao longo da própria curva.

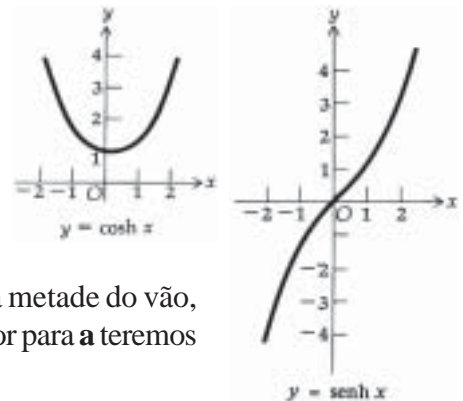
Essa curva tem uma fórmula cartesiana que é $y = a \cdot \cosh(x/a)$, não se assustem \cosh é co-seno hiperbólico, o co-seno que conhecemos vem de relações de um triângulo numa circunferência, o hiperbólico é em função de uma hipérbole equilátera, as calculadoras científicas normalmente tem essa função, ela está relacionada com o algarismo neperiano $e = 2,71828\dots$ e as funções \sinh e \cosh podem ser definidas assim:



Como podemos ver, há um problema para manejarmos essa curva que é o fator a , que é um afastamento da curva em relação ao eixo dos x , e entra também na relação que fornece o fator do seno e do co-seno hiperbólico.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Esse fator a na verdade é um fator de escala para a curva, isto é a curva tem uma única forma, mas comparando com uma corda suspensa, o fator a equivale a esticar mais ou menos a corda.



Para idealizarmos uma catenária devemos fixar um vão e uma flecha, daí munidos de uma calculadora, vamos experimentando valores para o fator a , alimentando sempre o x , que será a metade do vão, até obter o y (a flecha que desejamos), a partir daí, fixando um valor para a teremos uma equação da nossa catenária em mãos.

Exemplo: sabemos que a nossa corda com um peso no meio apresentou uma flecha de 1,75 m, a metade do vão é 5 m então por Pitágoras a hipotenusa vale aproximadamente 5,30 m, dobrando-se esse valor, temos o comprimento total da corda 10,60 m, o comprimento de uma catenária é a derivada de sua fórmula que é $y' = a \cdot \sinh(x/a)$, mas atenção é o comprimento da metade da corda pois vai do zero até o x . Vamos experimentando valores para a até que encontramos o valor de 8,4 que colocado na fórmula vai dar um valor para y' de 5,30 m.

Agora vamos aplicar o valor encontrado para a na fórmula da catenária para encontrarmos o valor de y ou seja a flecha que a corda fará sem o peso de 100 kg:

$$y = 8,4 \cdot \cosh(5 / 8,4), \text{ que vai ser igual a } 1,53 \text{ m.}$$

Para sabermos a força horizontal que a corda exerce nas árvores, precisamos saber com que ângulo a corda chega às árvores.

$$\text{A fórmula é } \alpha = 2 \cdot \arctan(\tanh(x / (2 \cdot a))) \quad \alpha = 32,25^\circ.$$

A força horizontal H é P (peso da corda)/2 $\cdot \tan 32,25$, a corda de 5/16 de diâmetro pesa 0,05 kgf por metro linear ao peso da metade de 10,60 metros será 0,265 kg. A força horizontal H será então de 0,420 kg.

Quando a corda está com o peso de 100 kg, o correto é somar as duas forças horizontais ou seja $0,420 + 142,86 = 143,28$ kg. Não altera muito o resultado porque o peso da corda é muito pequeno em relação aos 100 kg. Ufa!!

Não se desespere, A catenária não é uma curva tão diferente assim da parábola, o próprio Galileu, achou que a curva desenhada pelas correntes eram parábolas.

Para curvas com flechas até de 1/3 do vão, podemos trabalhar com parábolas que a diferença será muito pequena..

Estruturas penseis ou dependuradas

Na viga vagão as cargas ficam apoiadas na corda ou no tirante.

Ficar apoiado ou dependurado é a mesma coisa, tudo são apoios. Nas pontes penseis as cargas ficam dependuradas nos cabos.

Na foto desta ponte projetada por Thomas Telford, sobre o estreito de Menai, podemos ver que a ponte está dependurada por tirantes em grandes correntes que são responsáveis em vencer o vão.

Vemos também que os tirantes estão espaçados regularmente, então a carga da ponte é uniformemente distribuída nas correntes, sendo assim as correntes desenhadas a forma de uma parábola.

A figura da parábola tem a seguinte característica: Dobramos a sua altura no ponto de sua máxima inflexão, daí traçamos retas até os pés da parábola. Essas retas serão tangentes à parábola no ponto onde esta alcança os apoios.

Para fazer um exercício calculando esta estrutura, precisamos estabelecer alguns dados:

Esta ponte vence um vão de 174 metros, ela tem 21,75 metros de altura (pela escala da fotografia).

Para calcular a estrutura da ponte, precisamos estimar quais as cargas que atuam, imaginamos que ela tenha como peso próprio mais as cargas que ela precisa aguentar, algo em torno de 2.500 toneladas.

As 2.500 toneladas vão se dividir indo a metade para cada conjunto de correntes (são dois conjuntos) e novamente a metade para cada apoio: 625 ton. Essas forças verticais chegam aos apoios através

das correntes e como no caso da rede, chega por forças tangentes aos pontos onde as correntes atingem os apoios.

Então basta comparar as forças com o triângulo desenhado na foto ao lado:

A força horizontal está para a metade do vão (87 metros) assim como 625 ton está para o dobro da altura estrutural da ponte (43,5 metros). Resolvendo esta regra de três teremos 1.250 ton para a força horizontal, e usando Pitágoras encontramos o valor da força tangente que é quanto as correntes devem aguentar: Raiz quadrada de $625 \text{ ton}^2 + 1250 \text{ ton}^2$, ou seja 1398 ton.

Esta ponte não é autoportante pois as correntes estão fixadas à fundação, que precisam suportar o equivalente à força horizontal que é de 1250 ton.

Repare que, nas laterais, as correntes que vão de cima das torres de apoio à fundação fornecem a força horizontal contrária no topo dos apoios, e faz isso através de uma outra força tangente, que gera uma outra força vertical de 625 ton, então os apoios devem aguentar duas forças de 625 ton (vezes dois porque são dois conjuntos de correntes que chegam aos apoios), totalizando 2.500 ton para cada apoio.

Numa estrutura costumamos falar só do vão principal, mas é preciso reconhecer que



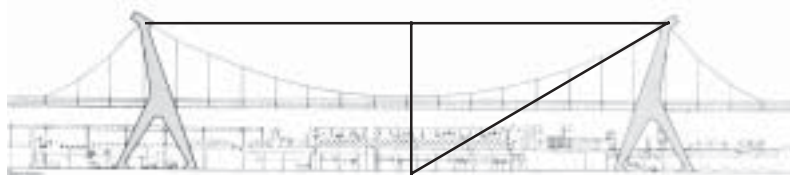
existem outros aspectos não tão importantes mas que também devem ser observados. Por exemplo os tirantes que dependuram a ponte estão espaçados de determinada distância que determina um pequeno vão, é preciso que exista um sistema de vigas para vencer esse vão e transmitir o peso da ponte para os tirantes. Então podem existir vários outros vãos que fazem parte da estrutura e precisam ser observados.

As fotos abaixo mostram a fábrica de papel em Mântova projetada por Pier Luigi Nervi.

Nervi nesse projeto, utilizou o mesmo conceito das pontes penséis, para que sua planta e suas laterais ficassem livres de pilares, permitindo uma maior liberdade para a instalação da fábrica.

Quatro conjuntos de cabos, sustentam toda a cobertura que fica dependurada através de tirantes.

É interessante notar que o travamento horizontal dos cabos é feito na própria laje de cobertura, e a proporção entre os balanços e o vão central, aproximadamente 1 : 4 : 1, sugere a inclinação dos pilares, a carga vai ser menor nos pilares se estes estiverem na posição ideal que é a bissetriz do ângulo formado pelos cabos.



Carga uniformemente distribuída leva a curvatura dos cabos à forma parabólica, e para o mesmo raciocínio da ponte sobre o estreito de Menai.

As forças que atuam na estrutura são proporcionais ao triângulo desenhado sobre a elevação lateral, tendo-se as medidas da metade do vão (125 m) e da altura estrutural (25 m) dobrada (50 m) e basta compará-las com a metade do total das cargas verticais ($250 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} \cdot 350 \text{ kg/m}^2 / 2 = 1312,5 \text{ ton}$)

Então:

A força horizontal está para 125 m, assim como 1312,5 ton está

para 50 m = 3281,25 ton, dividido por quatro sistemas de cabos. Esse tipo de estrutura precisa ter um travamento horizontal para não se deslocar para a frente para atrás e para os lados.

ARCOS

Nas suas primeiras construções os seres humanos utilizaram coisas autoportantes para vencer vãos, por exemplo troncos de árvores, pedaços de pedras etc. Mas logo perceberam que precisavam de pedras ou madeiras muito grandes para conseguirem vãos grandes.



Tiveram então de inventar uma maneira de organizá-los de modo que com vários pedaços pequenos, conseguissem produzir algo que conseguisse atravessar vãos grandes.

Provavelmente o arco foi uma das primeiras soluções encontradas.

O exemplo mostra uma funicular de um arco feito com pedras, em que estas estão dispostas segun-

do o caminho da resultante funicular, isto é, cada pedra está colocada exatamente com seu centro de gravidade onde passa a resultante das cargas da pedra que está exatamente acima.

P_1 é o peso da pedra de cima, esse peso é decomposto em duas forças, C_1 é a da esquerda, esta força vai somar com P_2 que é o peso da segunda pedra produzindo C_2 . É fundamental que o centro de gravidade da terceira pedra esteja na direção desta resultante C_2 (para que o arco não queira cair nem para fora nem para dentro), C_2 então vai se somar a P_3 que é o peso da terceira pedra formando C_3 que se junta a P_3 , para formar C_4 , que é a força que o sistema descarrega no chão. O chão precisa oferecer reação igual e oposta a C_4 para que o arco não afunde no chão. Dividimos C_4 em duas forças uma horizontal H_4 e outra vertical V_4 , pois se o chão não tiver capacidade de absorver H_4 , será preciso colocar um tirante.

Esse sistema está em equilíbrio porque as pedras estão colocadas exatamente na posição da resultante em cada trecho.

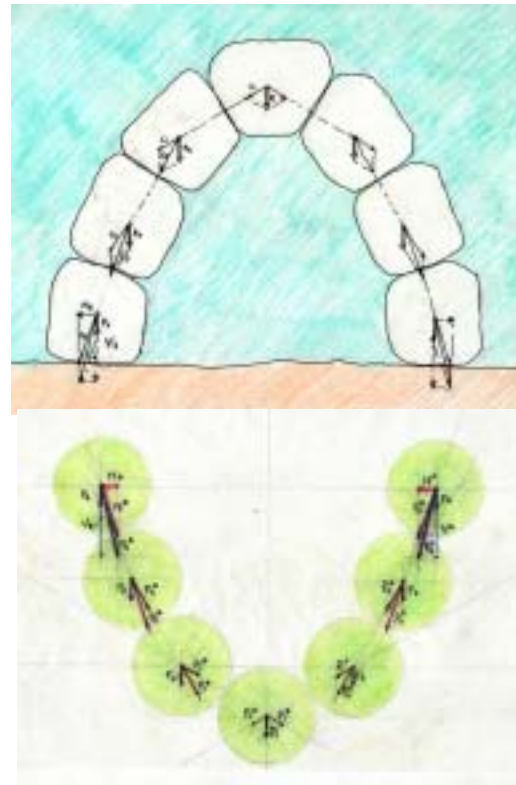
Essa curva chama-se funicular porque como seu próprio nome diz é a curva natural de um cordãozinho, ou de uma correntinha, então, a mesma figura feita com uma seqüência de esferas de cabeça para baixo fica em equilíbrio e as mesmas forças vão ocorrer, só que com o sinal invertido, isto é, onde havia tração agora tem compressão e vice-versa.

Vemos com este exemplo que a curva natural para uma corrente, uma corda, um cabo etc., é o mesmo desenho de uma curva ideal para um arco de mesmo vão, mesma flecha, mesmas cargas, ressaltando-se que a direção das cargas convergem para campos opostos, mas na escala de nossas construções isso é irrelevante. Há uma outra diferença que já foi dita anteriormente é com respeito à flambagem, que só existe com peças submetidas à compressão.

Gaudi percebeu a utilidade desse conceito e o utilizou para encontrar formas naturais para suas estruturas construindo modelos invertidos, de cabeça para baixo, pois como os fios, correntinhas etc., são flexíveis, eles procuram a sua forma ideal para resistir às cargas.

Conhecendo a forma ideal para resistir à tração basta desenhar invertido o modelo e considerar compressão onde havia tração e vice-versa. Nos exemplos anteriores da corda e da rede, para ficarem estruturas autoportantes é preciso haver uma barra horizontal para resistir às forças de compressão, liberando os apoios dessa função; no caso dos arcos também só se tornará uma estrutura autoportante se tiver um tirante na parte inferior, liberando a fundação dessa função.

Os arcos atirantados são vigas como outra viga qualquer, é uma viga que vence um vão que vai de um ao outro apoio e sua altura estrutural vai do eixo por onde passa a resultante das forças de compressão até o eixo do tirante. Não estamos acostumados a identificá-los como vigas pois o mais usual é usarmos o vazio interior do arco e não utilizar a parte debaixo do seu vão.



Cálculo de um arco

Quando o arco segue a forma da curva natural resultante, em nenhuma parte do arco vai haver flexão (compressão em uma face e tração na face oposta).

A curva ideal, ou natural não precisa percorrer exatamente o eixo do arco mas deve ficar dentro do terço interno de sua seção, caso contrário vai começar a gerar tração em uma das faces.

Esta ponte construída em pedra vence um vão de 10 m e tem como altura estrutural 2,10 m (a altura



entre o eixo do arco que trabalha a compressão e o nível da base do arco que trabalha à tração).

Não existe um tirante submerso, mas a fundação precisa fazer o trabalho do tirante, isto é não deixar o arco abrir.

A seqüência de cálculo seguirá exatamente igual a da corda:

1- Carga total vertical sobre a ponte. Precisamos sempre estimar qual a carga total que pode pesar sobre o arco mais o seu próprio peso. A largura da ponte é de 3 m, multiplicando-se pelo vão de 10 m temos como de área pesando em cima do arco 30 m^2 , supondo-se uma carga de

1500 kg por m^2 , teremos um total de 45000 kg .

2- Determinar as tangentes e seus ângulos na chegada do arco nos apoios. Um arco com a relação altura estrutural sobre o vão menor que $1/3$ tem curvas catenária e parábola muito próximas.

Podemos ver pela foto que existe um aterro nas pontas do arco, isso significa uma forma para a curva natural um pouco mais para uma circunferência do que para uma catenária, enfim vamos simplificar e considerar que a curva é uma parábola, então como fizemos anteriormente, vamos dobrar a altura estrutural e liga-la com as bases do arco, surgindo triângulos de catetos 5 m por $4,20 \text{ m}$.

3- Comparar o triângulo de forças, desse triângulo só conhecemos a força vertical que é de 45000 kg , dividida por dois (metade vai para cada apoio), com o triângulo geométrico 5 m por $4,20 \text{ m}$ por $6,53 \text{ m}$ ($6,53$ é a hipotenusa, encontrada usando-se Pitágoras).

4- Comparando os dois triângulos descobrimos quanto vale a força horizontal e a inclinada. Assim: 22500 kg está para $4,20 \text{ m}$ assim como a força horizontal está para $5,00 \text{ m}$, que dá 267856 kg , e a inclinada: 22500 está para $4,20$ assim como a força inclinada está para $6,53 \text{ m}$ que dá 17228 kg .

5- Dimensionamento.

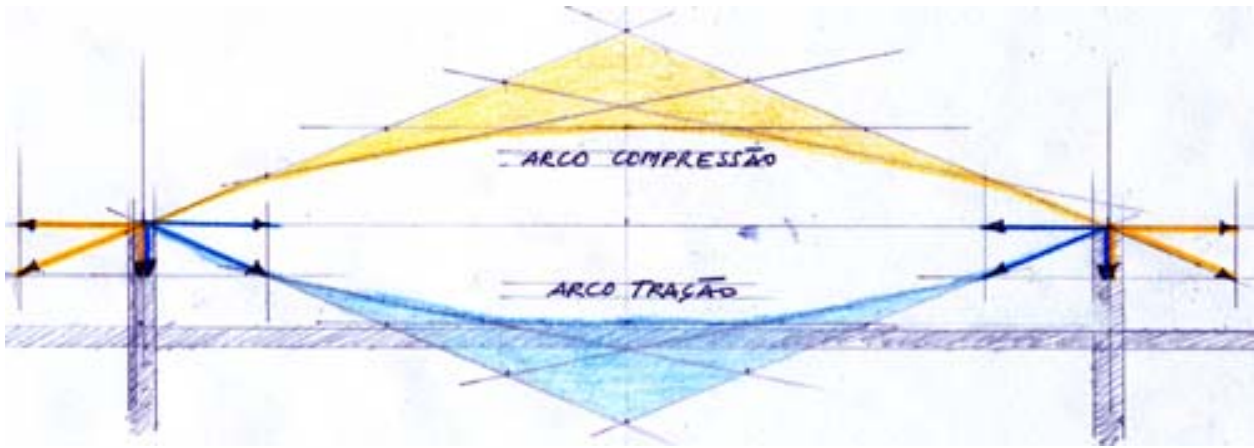
Agora devemos ver quanto material precisamos usar:

A pedra precisa aguentar a maior das forças que é de 17228 kg , as normas de construção recomendam aumentar em 40% as cargas encontradas como medida de segurança, teremos então 24119 kg ou 25000 kg . dividindo pela seção da ponte que é de 50 cm (espessura do arco) por $3,00 \text{ m}$ (largura da ponte) teremos 15000 cm , dividindo-se 25000 kg por 15000 cm^2 teremos $1,666 \text{ kg por cm}^2$. A pedra resiste mais do que 100 vezes essa carga, mas a ponte foi construída assim por que o arco trabalha à compressão e precisa resistir também à flambagem (será visto mais para a frente).



Vigas duplo arco

Nos arcos, como nas vigas vagão, só podemos colocar cargas neles e não sobre o tirante, pois estando na horizontal não conseguirá fazer com que nenhuma carga caminhe através dele próprio até os apoios. Mas se encurvamos o tirante, ficaremos com dois arcos, um de tração e outro de compressão, neste caso podemos dividir as cargas entre os dois arcos e ficaremos com uma viga vagão onde as duas partes são encurvadas como vemos na foto ao lado, a ponte está dependurada em cabos formando um arco de tração e também num arco superior de compressão.



Neste caso consideramos que da carga total da ponte, uma parte caminha pelo arco de compressão e outra pelo arco de tração, indo depois metade da carga total para cada apoio.

O arco de compressão produz forças horizontais para fora que são equilibradas pelas horizontais para dentro produzidas pelo arco de tração, de resto procedemos da mesma forma que nos casos anteriores.

Muito bem, esta ponte é uma viga tracionada na face de baixo e comprimida na face de cima, mas não é o caso típico de flexão porque as forças de tração e compressão estão bem localizadas em peças que trabalham só à compressão ou só à tração.

Nesta ponte, vemos que a carga é uniformemente distribuída ao longo de uma linha que é a própria ponte, então, podemos concluir que a curva natural para os dois arcos é o da parábola, tanto para o de tração como para o de compressão.

Calculamos então como na ponte sobre o Menai, com a diferença que agora desenhamos triângulos para cima do eixo central da ponte e para baixo, e como naquele caso comparamos o triângulo geométrico com o de forças.

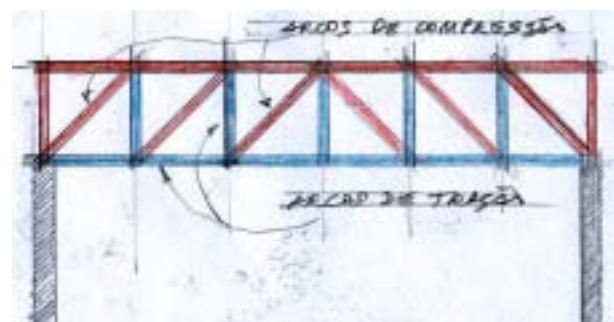
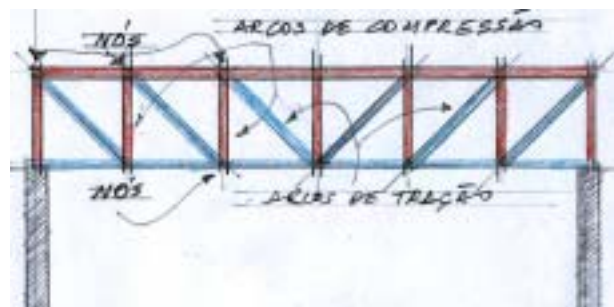
Treliças

Mais ou menos a mesma coisa ocorre com as treliças. Para que as barras da treliça não precisem trabalhar à flexão, as cargas devem somente ocorrer nos nós, como mostra o desenho ao lado. Pelo desenho de cima podemos perceber que nas treliças existem vários arcos de tração e compressão.

Bem no meio vemos um de tração que está dependurado como se fosse uma rede no primeiro arco de compressão. Este se apoia num outro arco de tração que por sua vez está dependurado em outro arco de compressão, e assim por diante. O último precisa de um último tirante.

Existem muitas possibilidades para a configuração de uma treliça, mas a regra básica é arco com o vazio para baixo trabalha à compressão, quando o vazio do arco está para cima, o arco trabalha à tração, e repare que no centro passam três arcos de compressão e de tração, isso significa que as barras horizontais da área central serão as mais solicitadas, as forças que passarão por elas serão maiores.

Se as pernas de um arco tiverem uma inclinação negativa, isto é “os pés” para dentro, já não é mais



um arco, então no limite suas pernas podem estar na vertical.

Para calcular uma treliça, basta ir caminhando do centro para as bordas e aplicando o que já fizemos com a rede e com os arcos, incluindo as novas cargas que forem aparecendo.

Assim no exemplo ao lado, bem no centro, temos uma carga de 100 kg dependurada num arco de tração, essa força vai se dividir em duas de 57,7 kg tracionando as duas barras, mas é importante observar que como já vimos com a corda, nesse passo aparecem também duas forças horizontais que vão ter a contrapartida no apoio em cima.

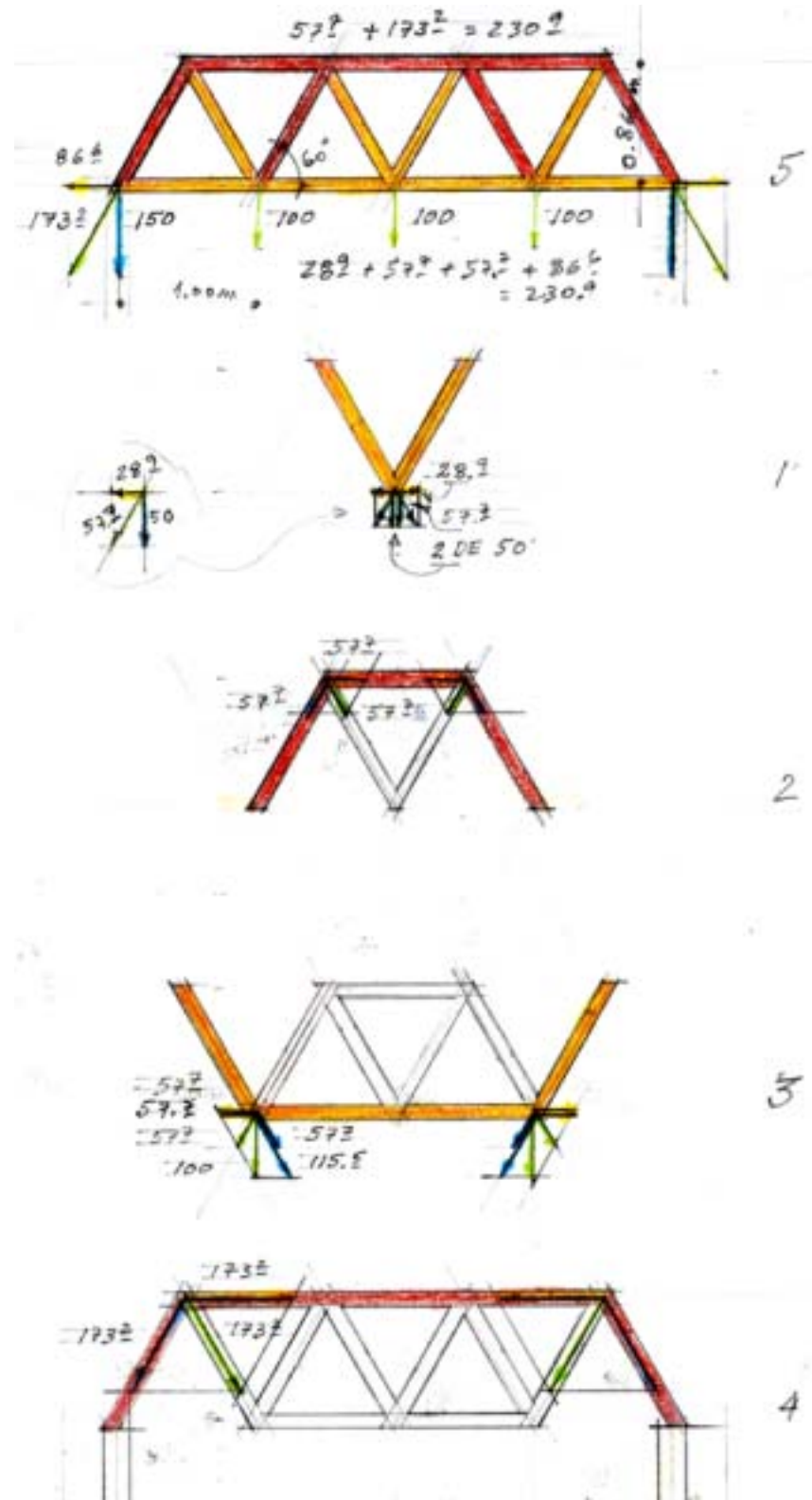
Estas barras estão dependuradas num arco de compressão e descarregam nesse arco as forças de 57,7 kg, que se dividem em duas forças de 57,7 kg, as horizontais se contrapõe, enquanto que as outras descem pelo arco que se apoia num outro arco de tração. Nesses apoios, existem outras cargas de 100 kg, que se dividem em duas, uma horizontal de tração de 57,7 kg e outra também de tração de 115,5 kg, que se somam as duas em que a força que vem do arco de compressão se divide ambas de 57,7 kg.

As horizontais se contrabalancam, as outras caminham até os pontos de apoio de arco de tração.

Este arco de tração está dependurado em um outro arco de compressão, que recebe então os 173,2 kg, que se dividem em duas forças. As horizontais de 173,2 kg se contrapõe as outras descem pelo arco até os apoios da treliça.

Nos apoios estas forças de 173,2 kg se dividem em horizontais de 86,6 kg que se contrapõe e em verticais de 150 kg que vão pelos apoios até as fundações.

Ao somarmos todas as horizontais de tração e compressão, que passam pelo centro da treliça vemos que elas são iguais de sentidos opostos e valem 230,9 kg.



Tesoura

A tesoura comumente usada para estruturar telhados é um tipo de treliça.

Como em qualquer treliça, para melhor “performance”, as cargas devem chegar nos nós, nunca no meio das barras.

No desenho ao lado vemos cargas de, por exemplo 1000 kg trazidas pelas vigas para a tesoura, ignoramos as que chegam diretamente aos apoios.

Essas cargas de 1000 kg se dividem e percorrem a estrutura.

Como a tesoura foi desenhada com as pernas formando ângulo de 30° com a horizontal, cada carga de 1000 kg se divide em duas outras iguais de 1000 kg.

As que percorrem as pernas da tesoura, vão para os apoios, as outras duas percorrem as peças intermediárias da tesoura, encontram-se no meio e se dependuram no pendural.

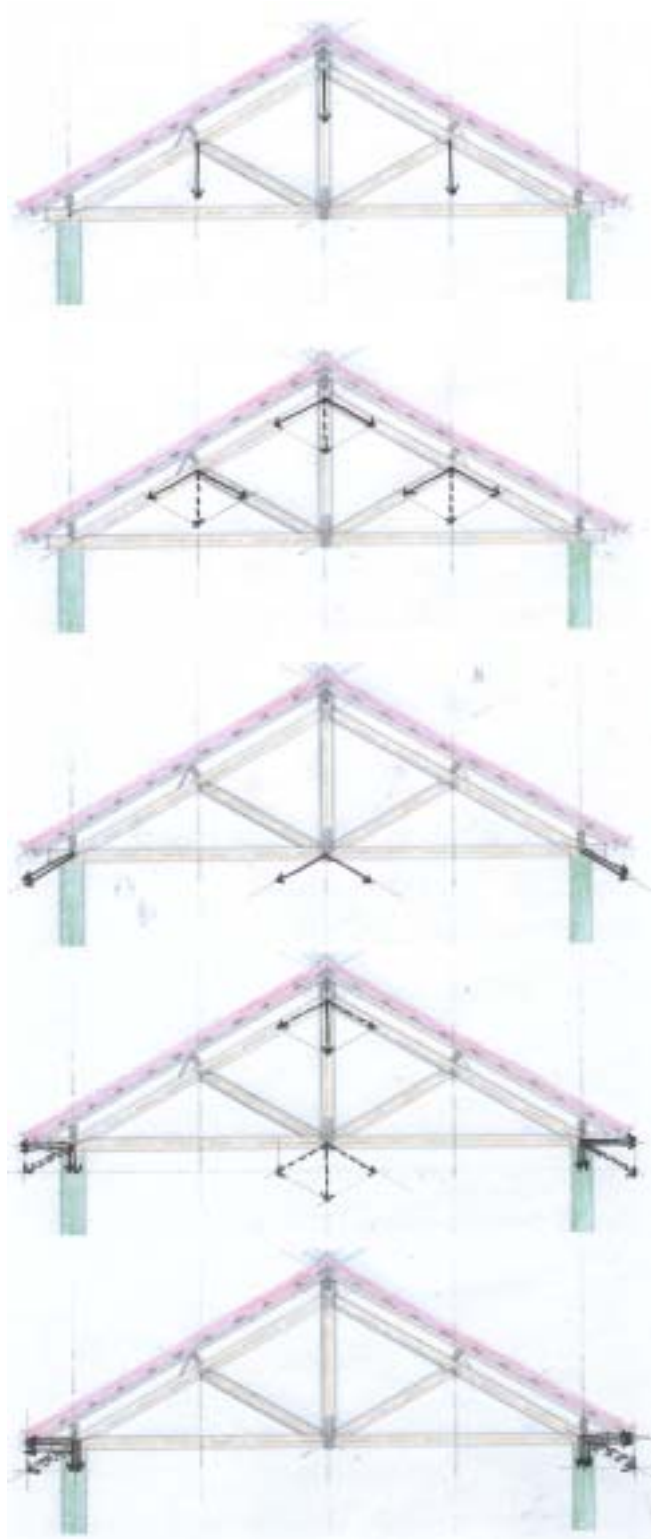
Pelo pendural chegam ao topo da tesoura dividem-se em duas também e caminham pelas pernas até chegarem aos apoios.

Quando chegam aos apoios dividem-se em horizontais e verticais.

Notem que são três verticais em cada apoio de 500 kg cada uma pois no total temos 3000 kg de carga vertical (dividido por dois igual a 1500 kg), as horizontais valem 500 kg dividido por tangente de 30° ou 866 kg. Como são três forças o total vai ser de 2598 kg que é a força que traciona o tirante.

Passam pelas pernas 3 forças de 1000 kg, totalizando 3000 kg de compressão e o pendural 1000 kg tração e as peças inclinadas 1000 kg compressão.

Se esta tesoura for construída com a madeira peroba que aguenta 85 kg/cm^2 , precisaremos para as pernas algo em torno de 36 cm^2 de seção, e para o tirante serão necessários 32 cm^2 , fora as partes recortadas para a execução dos encaixes.



Usando o próprio corpo para entender como funciona uma estrutura

Sempre que falamos de estrutura, o que vem em nossa mente é o sistema mais comum de se estruturar um edifício hoje em dia, ou seja um sistema de pilares, vigas e lajes.

Para entendermos como esse sistema funciona, vamos imaginar que uma pessoa em pé representa um pilar, e quando vamos cumprimentar essa pessoa, nossos braços ficam como se formassem uma corrente ligada por nossas mãos.

Pedimos para uma outra pessoa colocar um peso sobre nossas mãos (por exemplo que se apóie em nossas mãos), percebemos que nossos ombros querem se aproximar.

Descobrimos então que além de aguentar o peso (que é uma carga vertical) em nossas mãos, vamos ter de resistir a uma força horizontal que faz com que nossos ombros se aproximem.

Agora escoramos o ombro de nosso companheiro com o braço esquerdo e vice-versa, pronto, solucionamos o problema da força horizontal.



Os braços direitos que formam uma espécie de corrente, estão sendo tracionados pela ação do peso e os esquerdos comprimidos.

As vigas funcionam assim, compressão na

parte de cima e tração na parte de baixo. Construímos então com nossos corpos um sistema de vigas e pilares.

Quanto maior for a distância entre as partes tracionadas e comprimidas tão menores serão as forças horizontais.

Se agora levantarmos o braço direito sem soltarmos as mãos, faremos uma espécie de arco.

Mais uma vez pedimos para a outra pessoa colocar um peso sobre nossas mãos (se dependurar por exemplo), vamos sentir agora em nossos braços direito forças de compressão e percebemos surgir uma força de tração fazendo com que nossos ombros se afastem.

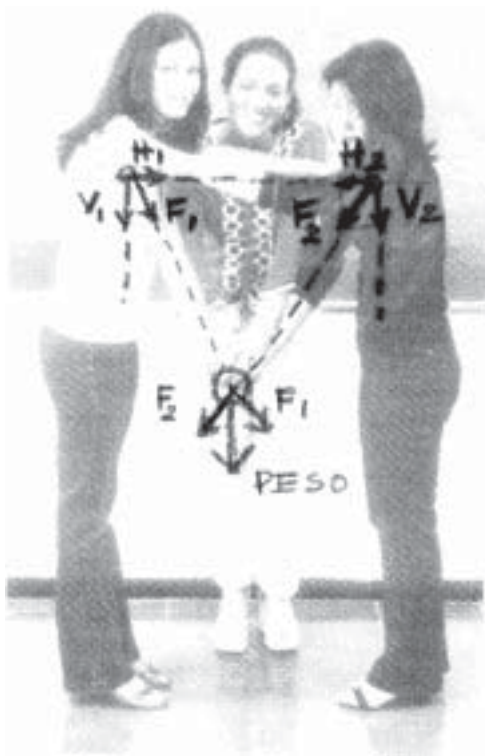
Para completar nosso esquema, seguramos com a mão esquerda o ombro de nosso companheiro e vice-versa. Agora nossos braços esquerdos trabalham à tração, impedindo que nossos ombros se afastem. Veja que esse é o esquema de funcionamento de uma tesoura de telhado.

Podemos sobrepor esses dois esquemas mostrados, segurando mãos esquerdas em cima e mãos direitas em baixo, só que agora devemos dividir o peso, parte do peso para as mãos de cima parte para as mãos de baixo (para solucionarmos isto, podemos segurar com ambas as mãos uma barra, por exemplo um cabo de vassoura, para que o peso colocado em cima seja aguentado também pelas mãos de baixo).

Esse é o esquema de funcionamento de qualquer viga. Na parte de cima haverá compressão, na parte de baixo tração.

Os braços quando estão na posição horizontal não estão suportando nenhum peso, pois lembrando do paralelogramo de forças, se colocarmos um peso sobre algo reto, sem espessura, não há como fazer aparecer uma reação contrária, então estes braços que estão na horizontal só vão resistir à forças horizontais.





Muito bem, mas **como calcular** uma estrutura desse tipo:

O peso se divide em duas forças (paralelogramo de forças) e estas caminham pelos braços até chegarem aos ombros, exatamente na tangente dos braços com os ombros, aí se dividem novamente em forças verticais que vai pelo nosso corpo até o chão e outras horizontais que serão de compressão ou de tração conforme a posição dos braços que estão suportando o peso. **IMPORTANTE:** Quanto menor o ângulo dos braços com a horizontal, maiores serão as forças horizontais, pois as verticais não se alteram.

Para quantificarmos as forças que atuam nessas estruturas, podemos fazê-lo pelo desenho ou pela matemática.

Pelo desenho, basta desenharmos numa escala qualquer a situação estrutural, atribuindo ao peso uma seta com um tamanho que representará o peso em alguma escala, por exemplo: cada centímetro da seta representará um quilograma força, depois é só completarmos o paralelogramo de forças e medirmos as forças resultantes em centímetros.

Para a solução matemática, basta resolvermos o paralelogramo, utilizando Pitágoras ou trigonometria.

A soma das forças verticais nos apoios será sempre equivalente ao total do peso. Se o peso estiver fora do centro ou se os apoios estiverem fora de nível as duas forças F_1 e F_2 nos apoios serão desiguais, porem sua soma será sempre igual a do peso total.

Neste caso o peso está bem no meio e os apoios estão nivelados, podemos então resolver matematicamente, usando a trigonometria, para isso, basta sabermos quanto vale o ângulo a entre a linha do peso e a de F_1 , por exemplo 35° , então, $\cos a = (\text{metade do peso ou } V_1) / F_1$, com isso saberemos o valor de F_1 , agora, sabendo F_1 calcularemos quanto vale H_1 , $H_1 = \sin a \cdot F_1$

Colocando números: se $a = 35^\circ$ e se o peso for de 20 kg, $F_1 = 10 \text{ kg} / \cos 35^\circ$ ou, $F_1 = 12,21 \text{ kg}$, e $H_1 = \sin 35^\circ \cdot 12,21 \text{ kg}$, ou $H_1 = 7 \text{ kg}$.

Neste exercício somente a parte tracionada é que transportava o peso, por que a comprimida estava numa reta horizontal, sem capacidade portanto de transportar uma carga vertical. Quando tanto a parte comprimida como a tracionada tem condições de transportar as cargas para os apoios, como na foto ao lado, o peso vai se dividir, sendo que P_1 faz aparecer C_1 e C_2 comprimindo os braços que estão para cima, e P_2 faz aparecer T_1 e T_2 tracionando os braços que estão na parte de baixo. C_1 se compõe com T_1 , tendo como resultante só a vertical $P/2$ e da mesma maneira C_2 com T_2 .

Ao invés da força horizontal ser resistida pelos outros braços, podemos convocar outras pessoas para nos ajudar a resistir às forças horizontais.



Enxergamos agora estruturas semelhantes às pontes penseis e às catedrais góticas.

Ponte sobre o Rio Menai, projeto de Thomas Telford



Nave da Catedral de Gloucester



CONSTRUINDO CÚPULAS COM OS BRAÇOS

Um novo experimento: Precisamos agora de no mínimo três pessoas, mas será melhor quatro ou mais, cada um levanta a sua mão direita e segura as mãos dos demais no alto.

Alguém de novo faz peso sobre as mãos que estão no alto, todos vão sentir força empurrando para fora, para que isso seja evitado, todos seguram os ombros do vizinho com o braço esquerdo.

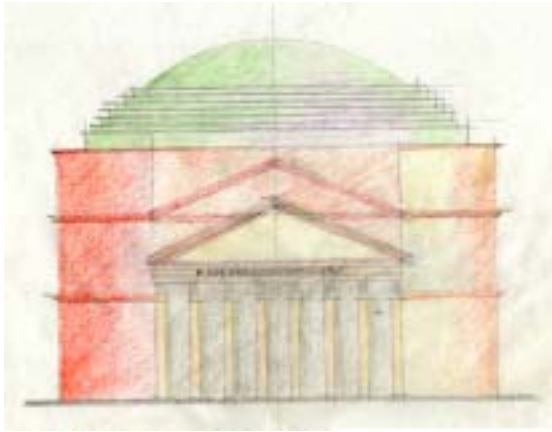
Pronto, está construída uma cúpula, o peso sobre a cúpula representados pelos braços direitos sofrem compressão e descarregam nos ombros na direção da tangente do braço direito com os ombros (neste caso é a direção do próprio braço). Estes então jogam nos ombros uma força inclinada que faz com que as pessoas se afastem.

Quando eles seguram os ombros do vizinho com os braços esquerdos, eles estão dividindo a força que chega em duas, uma vertical que desce pelo corpo para o chão, e outra horizontal que traciona os braços esquerdos, mas agora ninguém se afasta porque foi formado um anel de tração.

O próximo exercício é exatamente ao contrário, uma das pessoas está suspensa pelos outros, então eles tem de formar um anel de compressão com os braços esquerdos, os braços direitos estão recebendo o peso dessa pessoa.



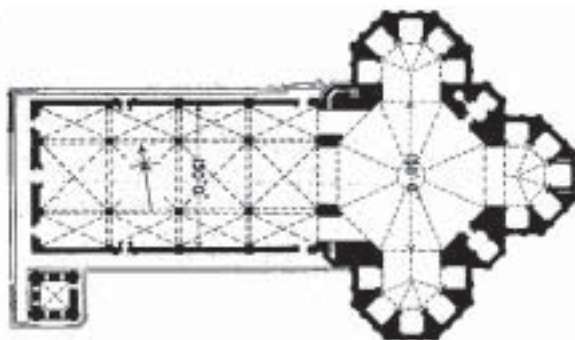
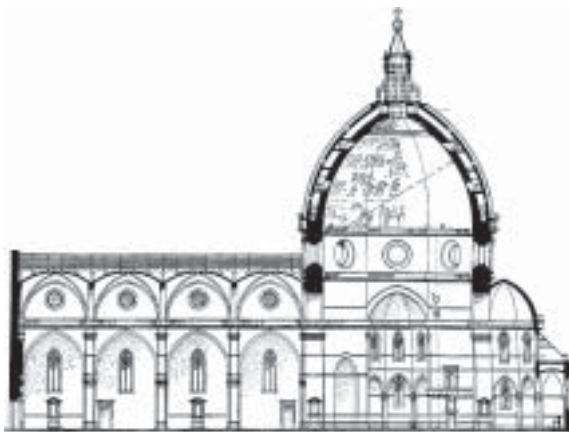
CÚPULAS



grandes espaços cobertos para reunir multidões, mas importante era construir muros e torres.

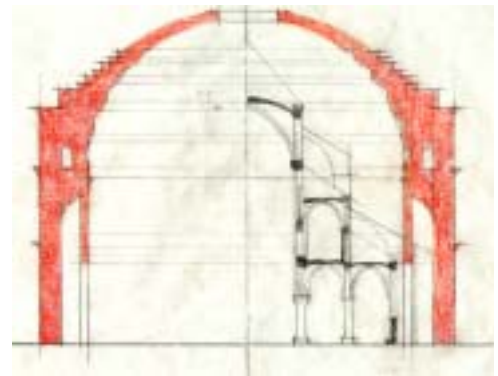
No fim da Idade Média com a construção das catedrais, era preciso novamente saber como construir grandes vãos. Mas este conhecimento já não estava mais disponível, havia se perdido pelo tempo. Nesses 1300 anos foi feito um grande vão, a Santa Sofia, Istambul (Constantinopla) com 32 metros de vão livre em 532-537 DC, mas na Europa por volta do ano 1000, um grande vão tinha cerca de 12 metros.

Imaginem o sentimento de inferioridade dos construtores e arquitetos daquela época que conheciam o Pantheon e não conseguiam superá-lo em seu vão livre. Dizem que Brunelleschi ficou mais de um ano estudando em seus mínimos detalhes até descobrir todos os seus



Há alguns milhares de anos o homem constrói cúpulas, dentre as inúmeras cúpulas construídas uma das que mais se destaca é a do Pantheon em Roma, construído entre 118 e 128 DC com 43m. de diâmetro e o mesmo de altura. É uma construção tão espetacular que até hoje está em perfeito estado e, foi um feito tão incrível que seu vão livre só foi igualado mil e trezentos anos após por Brunelleschi em 1420-1436 na cúpula de Santa Maria del Fiore em Florença.

Nesses 1300 anos, é provável que com a queda do império Romano e a conseqüente fragmentação do poder entre os senhores feudais, não houvesse necessidade de



segredos. Para termos uma idéia de seu tamanho, Notre-Dame de Paris quase cabe dentro do Pantheon na largura e na altura, lembrando que Notre-Dame é dividida em cinco vãos.

Brunelleschi ao construir Santa Maria del Fiore libertou o arquiteto do 1400 para o Renascimento. Agora podiam olhar os romanos de igual para igual, tinham o mesmo poder que Michelangelo vai confirmar na cúpula do Vaticano, 100 anos mais tarde.

Na cúpula do Pantheon foi usado um sistema de nervuras em tijolos formando vazios como numa laje nervurada, para sem perder altura estrutural diminuir o peso da estrutura. As paredes são duplas e o espaço entre elas foi preenchido com um tipo de concreto ciclópico, em algumas partes centrais foram utilizadas ânforas vazias.

Brunelleschi considerou que era importante o uso dos vazios para diminuir o peso da estrutura.

Devemos lembrar que a grande invenção do gótico consiste no uso de nervuras estruturais e materiais de vedação para preenchimento dos vazios.

Ele fez então duas cúpulas uma interna e outra

externa, interligadas por meio de nervuras horizontais e verticais, inclusive permitindo uma escada interna para acesso ao lanternim da cúpula. Com isso ele produziu uma espécie de laje nervurada com grande altura estrutural (espessura par resistir flambagem) e conseqüentemente menor peso.

Brunelleschi também deu à cúpula uma forma mais parecida com a parábola em revolução, pois já tinha observado no gótico que a forma ogival era mais forte que a circular.

No tempo de Brunelleschi e Michellangelo, não se dispunha de materiais que resistssem bem à tração como por exemplo os aços que existem atualmente. Naquela época os materiais mais utilizados eram o tijolo e a pedra, que resistem bem a compressão, mas muito pouco a tração. Por esse motivo precisaram desenhar suas cúpulas de modo que os esforços de tração ficassem bem diminutos e para isso fizeram o perfil das cúpulas acompanharem o caminho resultante da funicular das forças. “Funiculum” quer dizer cordão, quando suspenso assume naturalmente por ser mole, a curva da resultante das forças provocadas pelo seu próprio peso.

A forma dessa curva funicular pode ser conseguida facilmente reproduzindo em um modelo a forma e o sistema de carregamento da cúpula a ser estudada, utilizando materiais que não ofereçam resistência a compressão (por exemplo uma corrente) e invertendo-se a posição do modelo, pendurando de cabeça para baixo, como podemos ver no modelo ao lado construído no Laboratório de Estruturas Leves (IL), em Stuttgart por Frei Otto e sua equipe. Não se tem notícia que essa técnica fosse conhecida na época da construção do Pantheon nem de Santa Maria del Fiore.

Nesse modelo, na foto debaixo, podemos ver com correntinhas as resultantes funiculares das forças relativas ao próprio peso do Pantheon, simulados por pequenos pesos dependurados nas próprias correntinhas.

Na foto de cima, o modelo aparece invertido.

As fotos do modelo mostram de maneira simétrica forças que na de baixo são de tração, na de cima são de compressão; porem, é importante reparar que as correntinhas não fazem uma perpendicular com o plano de onde estão dependuradas, isto significa que as correntinhas estão puxando para dentro os pontos onde estão presas portanto estão comprimindo horizontalmente esse plano.

Na foto de cima (onde as forças atuam ao contrário) e que representa a posição certa da cúpula, esse plano está sendo tracionado.

Então, na fundação sempre vai haver alguma componente horizontal de tração, ou a própria fundação absorve essas forças horizontais ,ou deverá haver um anel de tração na fundação.

Lembre-se que a inversão pode ser feita porque há simetria entre os esforços de tração e os de compressão, a força de compressão no topo do Pantheon tem a mesma grandeza das de tração na fundação o que muda é o sentido.

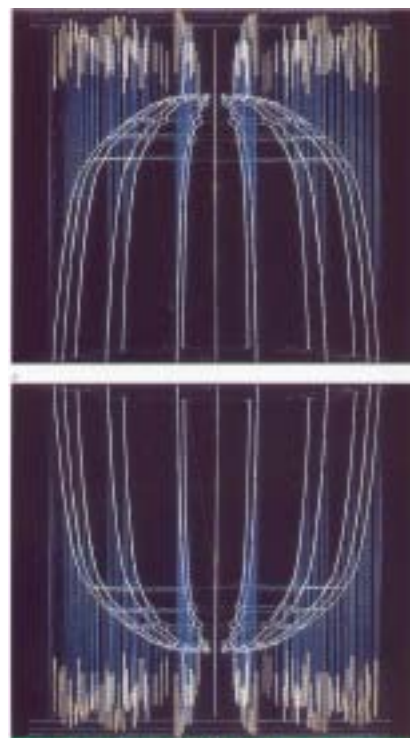
O Pantheon inteiro pode ser pensado como uma grande laje, onde a parte comprimida está ao longo da cúpula e a tracionada estaria na altura da fundação e a parte utilizada é o interior dessa grande laje.

É verdade que a força peso tem sua direção para o centro da terra, então as verticais não são exatamente paralelas, mas essa diferença na escala das nossas construções é desprezível.

A forma interna da cúpula do Pantheon é a de uma meia esfera , que não é a melhor forma para suportar seu próprio peso (a melhor forma e que o modelo vai indicar será uma figura próxima de uma catenária em revolução).

Algum tempo após sua construção, a cúpula de Santa Maria del Fiore começou a apresentar trincas; depois de algumas tentativas de reparo ao longo destes últimos séculos, Pier Luigi Nervi foi chamado para dar o seu parecer sobre as trincas.

Ele sugeriu que a diferença de temperatura causada pela incidência do sol provoca dilatações diferentes nas duas cúpulas.; e diz que nenhuma obra de arquitetura é eterna nem as pirâmides do Egito. Uma



construção nasce, vive e morre, como tal, um dia ficaremos privados dessa magnífica cúpula, mas, se continuarmos a encunhar as trincas, provavelmente estaremos encurtando sua existência.

Este fato só nos mostra que ela é assim, e é assim que devemos admirá-la, símbolo do início do renascimento, vencendo de novo um vão que só os romanos haviam se aventurado, e, vencendo inaugura uma nova época, produzindo uma nova forma com uma estrutura mais leve, que vai servir de modelo para Michellangelo 100 anos mais tarde cobrir o Vaticano.

Nervi projetou muitas obras primas, entre elas o “Palazzetto Dello Sport” para a olimpíada de Roma em 1960, que é também uma cúpula nervurada com 67m. de diâmetro feita em argamassa armada e concreto armado.



As placas que formam a cobertura foram pré-fabricadas em argamassa armada (concreto com cerca de 1.5 a 2 cm de espessura, armado com tela metálica), formando em seu bojo nervuras que foram posteriormente armadas e concretadas.



Interessante a forma com que Nervi dramatizou o apoio da cúpula em pilares com a forma de “Y”, que parecem braços abertos que a amparam, tendo um pé a frente outro atrás.



Gaudì

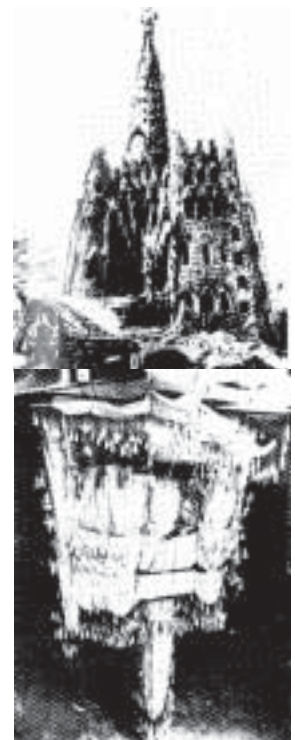
Quem melhor se utilizou desse conhecimento foi Gaudì (Antoni Gaudì 1852-1926) que executou projetos, estudando sua forma em modelos invertidos, como podemos ver ao lado.

Acima um desenho da igreja da colônia Guell e abaixo seu modelo executado de cabeça para baixo. O desenho foi produzido a partir de fotografias do modelo invertido.

Gaudí como nenhum outro arquiteto, entendeu tão bem o funcionamento estrutural, em seus projetos vamos encontrar toda sorte de soluções estruturais, que por vezes aquilo que pensamos ser um simples enfeite, ou um mero capricho formal, na verdade assume determinada forma objetivando maior qualidade estrutural.

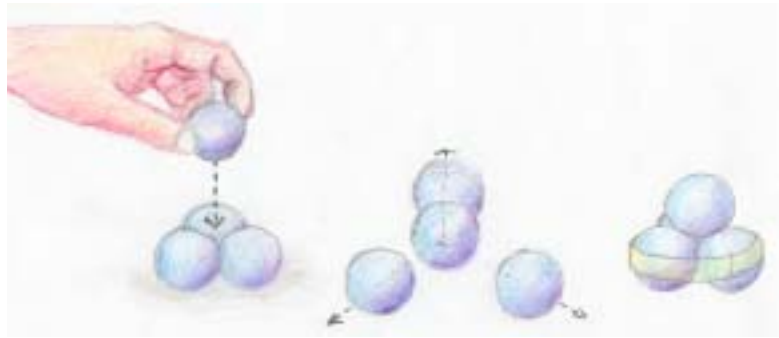


Somente a parte inferior dessa capela foi construída, que é chamada de cripta Guell, mas nessa parte que foi construída podemos observar elementos estruturais incríveis como pilares de pedra maciça colocados fora da vertical e um sem número de septos em forma de arco construídos em tijolos, cuja posição e forma foram encontrados no modelo.



O COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DAS CÚPULAS

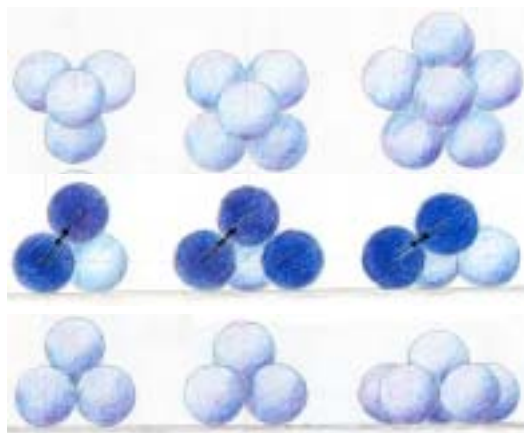
O comportamento estrutural das cúpulas é muito simples, para começar vamos imaginar que queremos construir uma cúpula muito pequena, a mais simples possível, apoiamos uma pedra sobre outras três pedras, teremos algo parecido com um tetraedro, observe que se as pedras forem como bolas de bilhar, ao colocarmos a de cima, as três vão se afastar e, nossa pequena cúpula estaria desfeita.



Vamos então passar uma fita adesiva ligando as três bolas ; agora sim conseguimos construir uma pequena cúpula.

A fita adesiva vai trabalhar como um anel de tração evitando que as bolas de baixo se afastem. Mas, um tetraedro é uma cúpula? Repare que a bola de cima cobre o espaço vazio entre as três bolas da base, então é uma cúpula sim. É a cúpula mais elementar possível.

Se conseguirmos entender como a mais elementar funciona, depois é só ir aos poucos tornando mais complexo o problema.



Se agora colocamos quatro bolas na base ou cinco bolas, continuamos a ter uma cúpula com mais espaço livre no meio, porém a bola de cima vai ficar cada vez mais para baixo. Isso fará com que a força que a bola de cima descarrega nas de baixo fique mais inclinada, tornando a componente horizontal cada vez maior, então quanto mais abata a cúpula maior será a força de tração na fita adesiva.

Se colocarmos mais camadas de bolas, começaremos a modificar a curvatura da cúpula. Conforme o perfil de curvatura da cúpula ela precisará de mais outros anéis de tração. Porém se o seu perfil for exatamente o caminho da resultante das cargas que a carregam, só haverá forças de compressão nas paredes da cúpula.

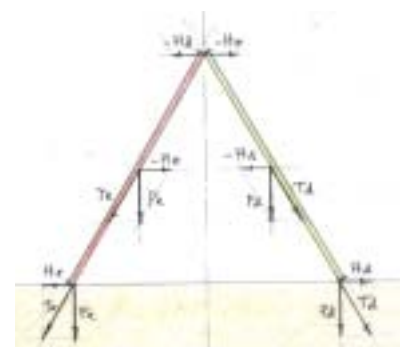


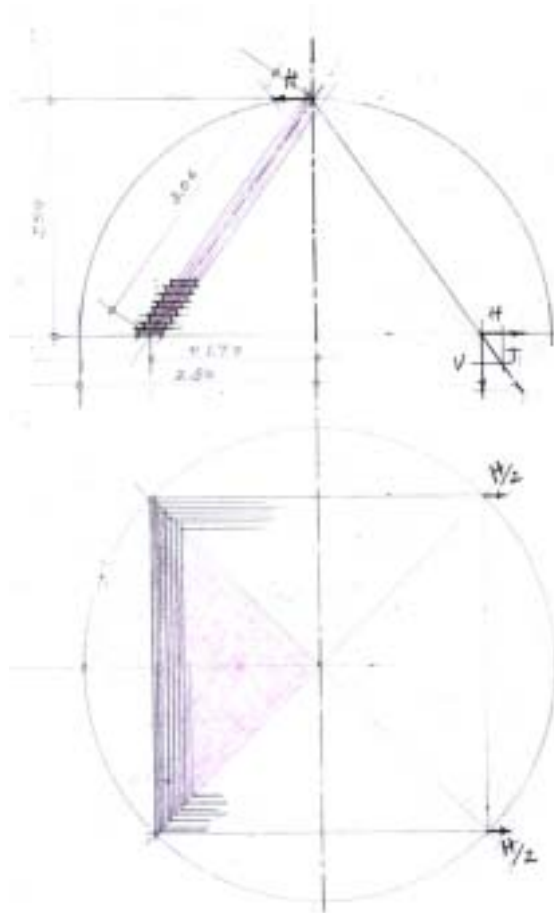
Vamos percorrer agora um outro caminho para entendermos o funcionamento estrutural das cúpulas. Para isso vamos examinar o que acontece quando apoiamos uma escada na parede:

Dividimos o peso P em duas forças, uma $-H$ e uma T , esta caminha pela escada até atingir o chão, onde é dividida em duas a P que é o peso e uma horizontal H que deve ser anulada por uma reação causada pelo atrito da escada com o chão. A outra força $-H$ é anulada por uma reação igual da parede. A força $-H$ é de mesma intensidade que a H .

Agora vamos colocar outra escada em oposição à primeira, pronto temos um arco, a força $-H$ da direita se opõe à $-H$ da esquerda. No chão, se quisermos ignorar a capacidade de atrito, basta unirmos os pés das escadas com um tirante (uma corda por exemplo).

Se imaginarmos que esse desenho representa um corte de um cone, ao invés de um tirante podemos colocar uma cinta em volta da base do cone.





Ao invés de um cone agora vamos ver como funciona uma pirâmide, construída com tijolos, pelo desenho vemos que é uma metade de octaedro.

Primeiramente precisamos saber o peso de cada uma das quatro partes, que tem como forma um triângulo de base 2,50 m dividido pela metade da raiz quadrada de 2, que vai ser 3,54 m, e de altura 3,06 m (no octaedro todas as arestas são iguais, e por Pitágoras encontramos o valor da altura), porém pelo projeto vemos que é uma parede na espessura de um tijolo onde estes vão se projetando a cada fiada para dentro, então vamos considerar a altura como 2,50 m.

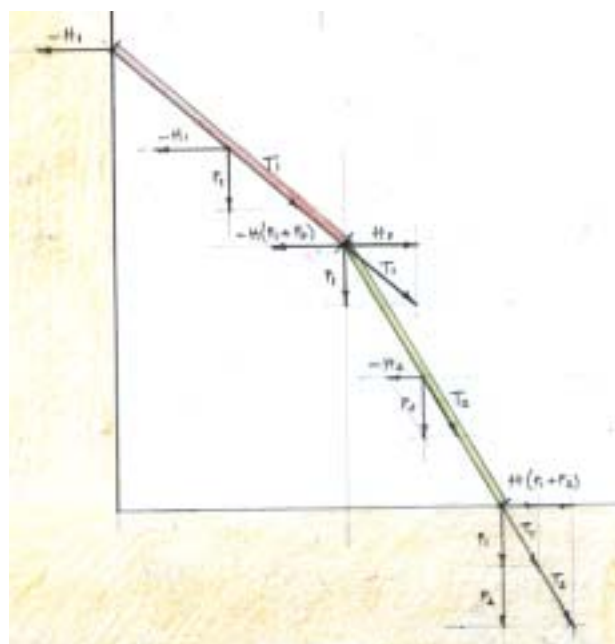
A área de cada parte será 3,54 m x 2,50 m dividido por 2, que dará 4,425 m², que multiplicado pelo peso específico de uma parede de um tijolo de espessura 400 kgf, mais uma carga acidental de 50 kgf pom m², teremos um peso total para cada face da pirâmide 1991,25 kgf, acrescido de 40%, conforme recomenda a norma teremos um peso de 2800 kgf, que é a força V representada no desenho.

Essa força V é a decomposição da T que é a força que percorreu a face da pirâmide, a outra componente é H, comparando-se o triângulo geométrico com o de forças vamos ter que $H = 1,77$

m x 2800 kgf dividido por 2,50 m que vai dar 1982,4 kgf, aprox. 2000 kgf.

A base da pirâmide precisa funcionar como uma viga deitada para transportar essa força horizontal (que na verdade é distribuída e não concentrada) para os apoios que serão forças opostas e iguais das outras faces, então a metade do valor de H, 1000 kgf, é o que a cinta que envolve a base da pirâmide precisa resistir.

Agora vamos colocar uma segunda escada apoiada em cima da primeira, formando um determinado ângulo de forma que a força horizontal H1 no pé da escada de cima seja igual a força $-H(P1+P2)$. Essa



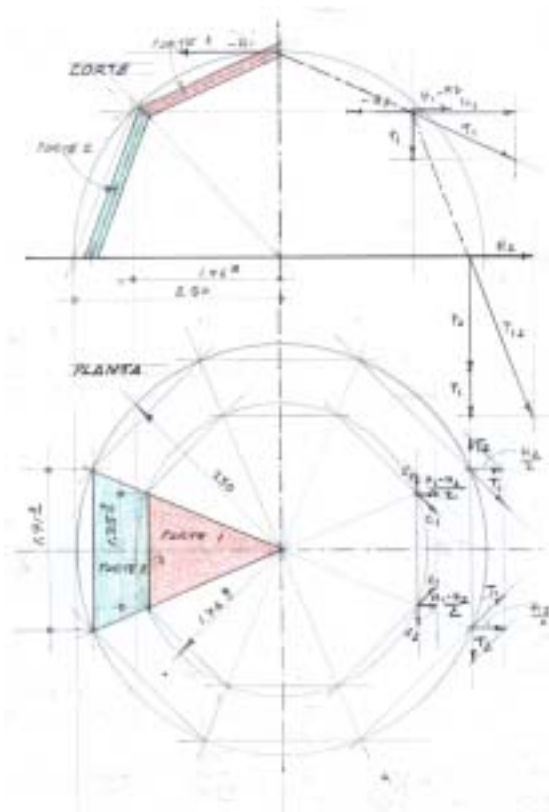
é uma situação de equilíbrio instável com certeza, mas a força que a escada de cima empurra a de baixo é a mesma que a de baixo empurra a de cima. Repare que a escada de baixo tem de carregar também o peso da de cima, por isso que ficou $P1+P2$.

Se trocarmos a parede por outras duas escadas simétricas, temos um arco com quatro elementos, que também estará em equilíbrio instável, mas em equilíbrio.

Essa é a idéia de como podemos calcular as cúpulas, dividimos as cúpulas em partes, em quanto mais partes dividirmos, mais preciso vai ficar o cálculo.

Se $H1$ fosse maior que $H(P1+P2)$ seria necessário colocar um tirante ou se for uma cúpula seria necessário um anel que resistisse tração.

Vamos agora ver um exemplo de uma cúpula



dividida em planta em oito partes ou setores e verticalmente em quatro partes, lembrando que em quanto mais partes dividirmos mais o poliedro resultante se parecerá com uma esfera.

No corte podemos observar que a figura é igual a das duas escadas sobrepostas, a diferença é que agora a Força H1 supera a H2 resultando uma força para fora H1-H2, isto é há uma tendência da cúpula em abrir para fora, nesse lugar devemos colocar cintas resistentes à tração dando a volta em toda a cúpula na altura de H1 e na base para segurar H2..

Para quantificarmos que forças de tração essas cintas precisam resistir, devemos nos dirigir ao desenho em planta, e da mesma maneira como vimos no caso da pirâmide, dividimos por dois as forças H2 e H1-H2, só que agora precisamos decompor essas forças nas direções das cintas nos setores contíguos, aparecendo assim C1 e C2, como em cada setor surgirão essas duas forças o total da força de tração na cinta será a soma do valor das duas.

CÚPULAS NATURAIS

Como vimos as cúpulas naturais são aquelas que tem a forma da resultante funicular, nestas em toda a cúpula em qualquer direção só existem esforços de compressão, tração só existe onde ela é interrompida, ou seja na sua base. Então onde a cúpula é interrompida, há necessidade de existir um anel de tração, ou algo que o substitua.

Cálculo do anel

Como exercício vamos calcular o anel necessário para a base de uma cúpula em tijolos comuns, na espessura de meio tijolo, com o diâmetro de 7 metros e altura de 4,25 metros, pelo eixo dos tijolos, com a forma de uma catenária em revolução.

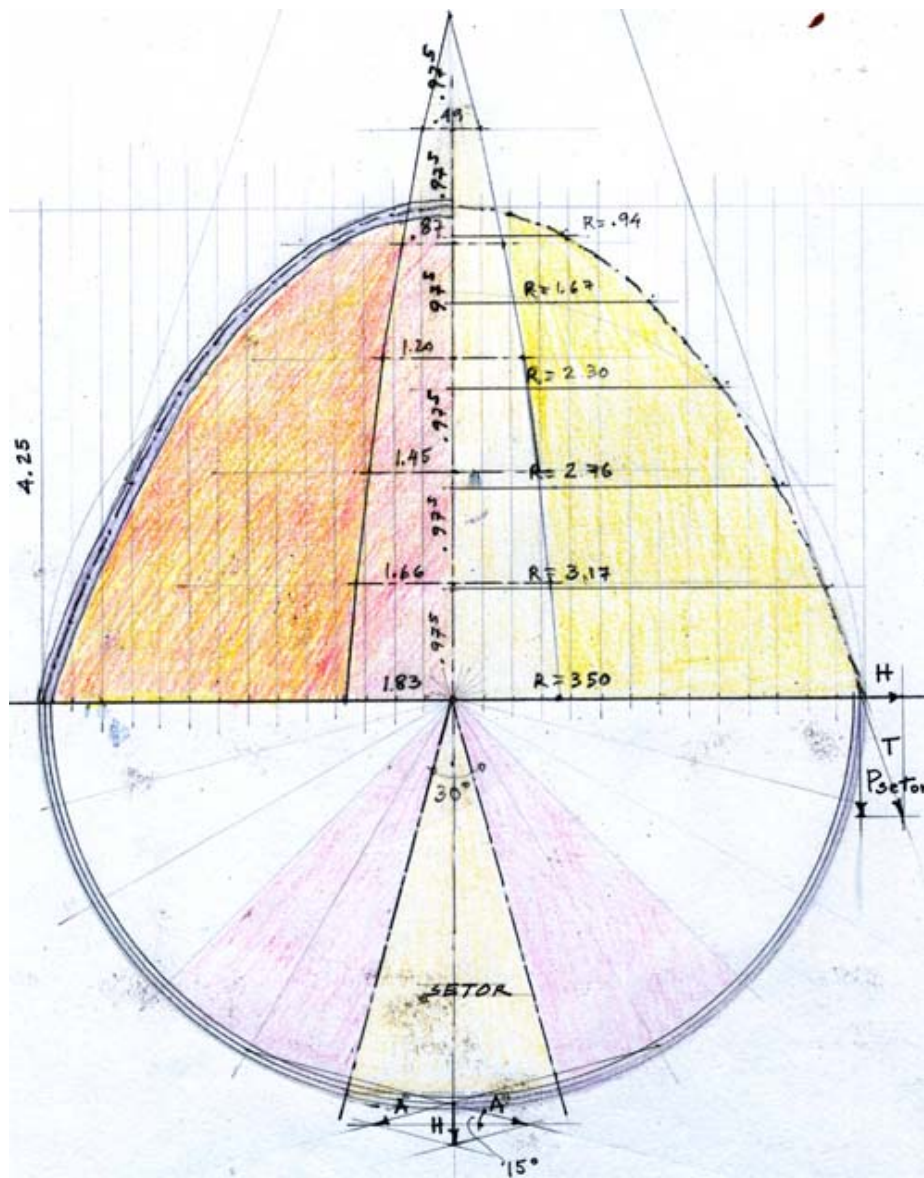
1- Dividimos a cúpula (vista superior) em setores, quanto mais pedaços dividirmos maior será a exatidão do resultado. Vamos dividir por exemplo em doze setores de 30° cada, daí mediremos a área da superfície de cúpula de cada setor, para sabermos a carga que cada um representa.

2- Medimos o desenvolvimento de cada setor da base até a ponta. No nosso caso 5,85 metros. Dividimos essa medida em partes iguais por exemplo em seis intervalos de 0,975 m.

Para desenharmos o seu desenvolvimento marcamos no corte da cúpula essas medidas e medimos a que distância esses pontos estão do eixo vertical, vamos encontrar raios que multiplicados por $2 \cdot \pi$ e divididos por 12, darão a largura do setor naquele determinado ponto.

No nosso caso vamos obter para o raio de 3,50 m, 1,83 m; para o raio de 3,17 m, 1,66 m; para o de 2,76 m, 1,45 m; para o de 2,30 m, 1,20 m; para o de 1,67 m, 0,87 m, para o de 0,94 m, 0,49 m.

3- Medimos a área de cada trapézio e do triângulo final, e obtemos assim a área total de um setor, que multiplicado por uma carga de peso próprio mais uma carga eventual que deve ser prevista e teremos então o total da carga vertical que cada setor da cúpula entrega para a fundação.



A área total do setor é de 6,42 m² e multiplicada por 280 kg/m² (peso de cada m² de alvenaria de meio tijolo) mais 50 kg (cargas eventuais), obtemos a carga vertical do setor 2118,6 kg.

4- Montamos o paralelogramo de forças, indicado no corte da cúpula acima e obtemos a força horizontal H.

Vamos comparar dois triângulos semelhantes um de forças e outro de medidas, para encontrar o valor de H.

H está para a força vertical de 2118,6 kg assim como a meia largura da cúpula 3,50 m, está para a altura em que o eixo da cúpula encontra a tangente que passa pela sua base 11,15 m, H = 665 kg.

5- Examinando agora a força horizontal pela vista superior, vemos que há uma situação

semelhante a que havia com o peso na corda, a força H está tracionando a “corda” que agora estamos chamando de anel de tração, e ao invés desta corda estar presa a árvores, ela está presa aos setores contíguos, estes por sua vez estão tracionando os seguintes e assim por diante até dar a volta completa.

Para calcular o valor dessas forças A, é só comparar o triângulo do setor com o triângulo das forças A com H, ou A está para 3,50 m assim como H (665 kg) está para 1,83 m H (665 kg), então A = 1272 kg.

6- Dimensionamento: Se optamos por executar um anel com aço CA-50 (aço para Concreto Armado com resistência de 50 kg/mm²), precisamos de 25mm² de aço (1272 kg / 50 kg/mm²) ou seja uma barra com 6,2 mm de diâmetro.

Atenção: Não estamos aplicando os coeficientes de segurança indicados pelas normas.

Se quisermos resultados com maior precisão ou adotamos as fórmulas matemáticas, ou dividimos em mais setores, aí estaremos nos aproximando ao processo que Arquimedes usou para calcular a superfície de uma esfera etc.

As fórmulas da catenária são as seguintes:

Para o desenho da cúpula y (a altura ou 4,25 m) = $a \cdot \cosh(x/a) - a$.

Não sabemos o valor de a , é um parâmetro da escala da curva, isto é a curva tem um só desenho mas o fator de ampliação que é a é que vai dar a proporção entre um vão e uma altura escolhida, que no nosso caso é 3,50 m de raio ou 7,00 m de diâmetro e 4,25 m de altura.

Para descobrir o valor de **a**, temos de ir experimentando **a** até obtermos com $x = 3,50 \text{ m}$, um $y = 4,25 \text{ m}$, para este caso o valor será **1,9** para **a**.

Para o comprimento da catenária $c = a \cdot \text{senh}(x/a)$ ou $5,8437\dots\text{m}$

Importante lembrar que nessas fórmulas a catenária está de cabeça para baixo e o eixo dos y passa pelo meio, então as fórmulas nos dão uma metade da curva. É importante também saber, veremos isso mais para a frente, a catenária não é exatamente o perfil natural para uma cúpula sem outro carregamento que não seja seu próprio peso, mas é muito próximo, pois temos um triângulo esférico e não um arco.

Cúpula hemisférica

A cúpula hemisférica **não** é uma curva natural, **não** segue o desenho da resultante funicular, então ela apresenta flexão em alguns trechos ou seja tração e compressão num mesmo trecho em faces opostas.

A foto ao lado é uma reprodução de um modelo feito por Leonardo Da Vinci para estudar o comportamento das cúpulas. Ele amarrou cordões a trechos de uma cúpula e equilibrou-os com pesos atados a esses cordões. Esses pesos darão uma noção do esforço que os anéis devem aguentar.

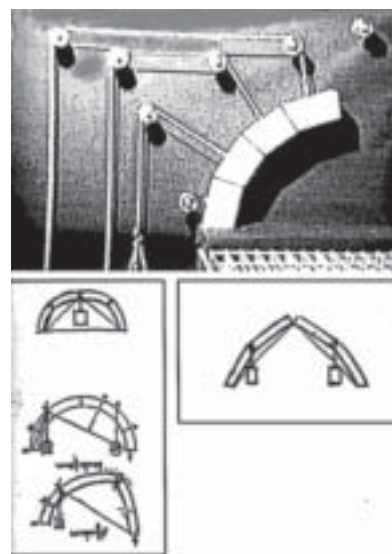
Se estivermos trabalhando por exemplo com tijolos, será necessário colocar anéis de aço pois a alvenaria suporta bem compressão, mas é frágil com respeito à tração.

Para entendermos onde devemos colocar esses anéis, vamos primeiro imaginar um modelo de cabeça para baixo feito por exemplo com correntinhas, ele vai assumir a forma de uma catenária em revolução, se quisermos que o modelo assuma a forma de uma meia esfera, vamos precisar colocar anéis que forcem as correntinhas para fora, pois a esfera é mais bojuda que a catenária, e será mais fácil começar por baixo, isto é colocar primeiro o anel mais baixo, depois um outro mais para cima e assim por diante, finalmente poderemos ter um modelo de cabeça para baixo de uma meia esfera.

Vamos fazer o mesmo caminho, só que agora com a cúpula do lado certo e vamos começar de cima para baixo, colocando primeiro um anel em cima e depois outros mais para baixo.

Entre um anel e outro a cúpula está apta a resistir somente compressão, portanto é necessário que a curvatura natural esteja contida no interior de sua espessura.

O que vamos fazer é o indicado esquematicamente ao lado. A parte de cima quer cair empurrando para fora e a parte de baixo quer cair empurrando para dentro. Se a força que quer cair para dentro for maior que a que quer cair para fora, a própria cúpula é capaz de resistir pois trata-se de compressão no anel horizontal, mas se ocorrer o inverso, precisamos de um anel de tração.



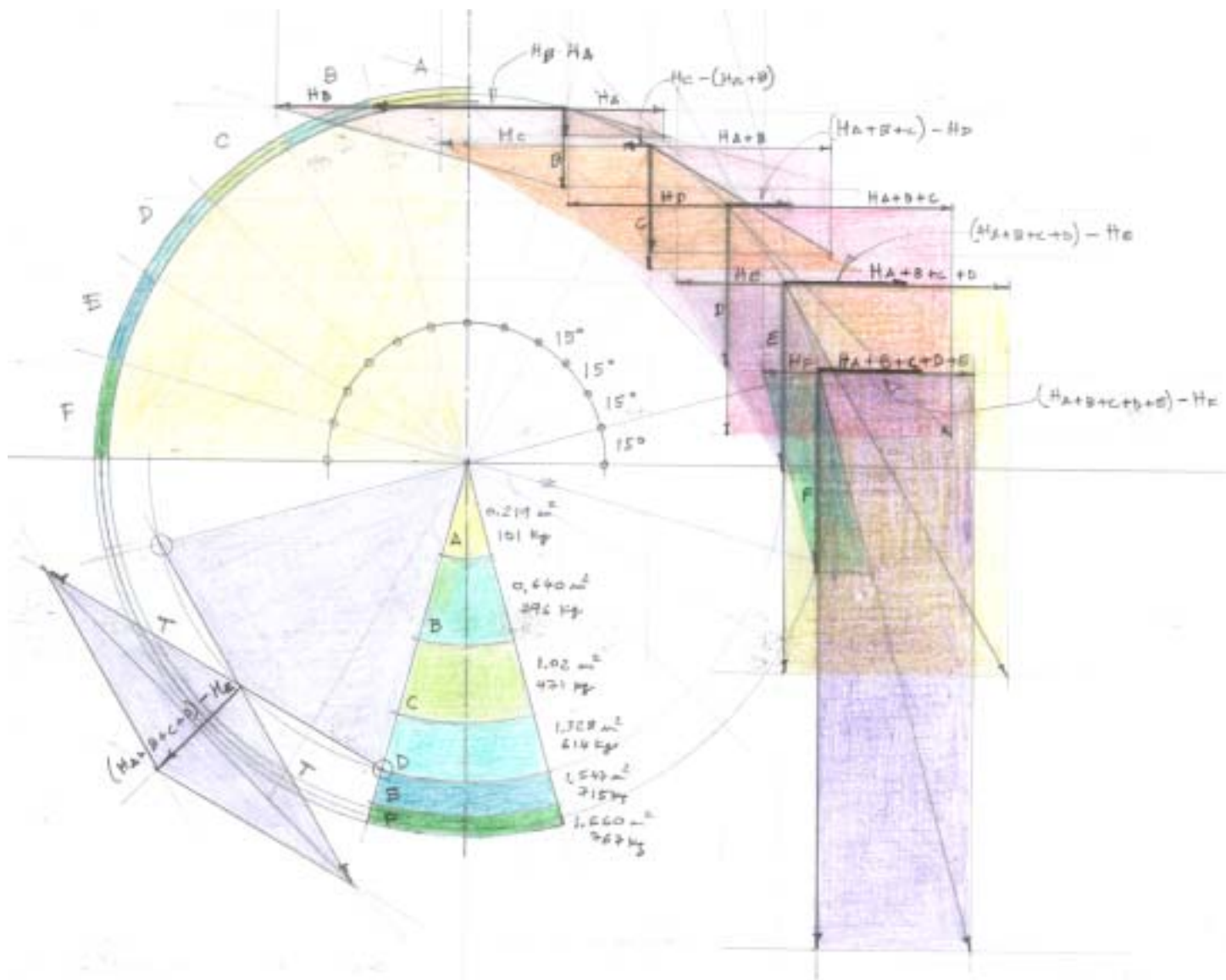
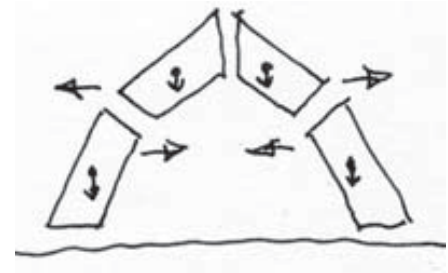
Vamos colocar anéis, conforme mostra o desenho, de 15° em 15° por exemplo.

Esta é uma cúpula construída em forma de hemisfério. Vamos calcular o peso de cada uma das partes de um setor esfera em tijolos na espessura de meio tijolo.

No desenho acima a parte superior representa a cúpula vista em corte e a inferior representa a cúpula em vista de cima.

Pela vista de cima vemos a cúpula dividida em 12 setores de 30° cada, e na vista em corte vemos cada setor da hemisfério dividido em 6 partes de 15° cada.

Não se assuste com o desenho porque não é tão complicado assim. Na parte superior teremos então 12 triângulos um de cada setor, que vamos chamar de parte **A**, que formam um casquete esférico, que tem como fórmula para cálculo de sua área: $s = 2 \cdot \pi \cdot R (R - (R \cdot \text{sen}\alpha))$ que dividido por 12, dará a área de cada triângulo esférico.



Em seguida para baixo outras 12 partes em forma de trapézio esférico de cada setor que chamamos de parte **B**, depois outras 12 partes **C**, depois **D**, **E**, e finalmente outros 12 trapézios parte **F**. Para cálculo da área dessas outras partes, calculamos a área de um novo casquete esférico com o ângulo respectivo e depois descontamos a área do casquete acima, a diferença dividida por 12 será a área de cada trapézio esférico daquela parte.

Então:

$$SA = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 15^\circ)) = 0,219 \text{ m}^2$$

$$SB = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 30^\circ)) = 0,640 \text{ m}^2$$

$$SC = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 45^\circ)) = 1,020 \text{ m}^2$$

$$SD = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 60^\circ)) = 1,328 \text{ m}^2$$

$$SE = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 75^\circ)) = 1,547 \text{ m}^2$$

$$SF = 2 \cdot \pi \cdot 3,50 (3,50 - (3,50 \cdot \text{sen } 90^\circ)) = 1,660 \text{ m}^2$$

1- Vamos calcular a carga de cada uma das partes de cada setor. A parte **A** tem como área 0,219 m², como a alvenaria de meio tijolo pesa 280 kg por m² e vamos somar uma sobrecarga de 50 kg/m² teremos 330 kg. A norma pede que aumentemos as cargas de cálculo em 40% então a carga total a ser prevista por m² será de 462 kg, que multiplicado pela área **SA 0,219 m² = 101 kg**

Repetimos a mesma operação para as partes **B, C, D, E e F**, e encontraremos para a parte **B: 296 kg**, para a parte **C: 471 kg**, para a parte **D: 614 kg**, para a parte **E: 715 kg** e finalmente para a parte **F: 767 kg**.

2- A parte **A** descarrega sua carga **A** no topo da parte **B**, com a inclinação de 7,5° com a horizontal, gerando a força horizontal **HA** que empurra para fora o tampo da parte **B**. A força **HA** é igual então a 101 kg dividido por tg 15° = **377 kg**.

A parte **B** empurra o pé da parte **A** com a componente horizontal **HB** de sua carga que vale 296 kg dividido por tg 15° = 1105 kg. A resultante é uma força **HB - HA**, que empurra para dentro com **728 kg**, não há necessidade de reforços pois os tijolos suportam bem compressão (acima de 30 kg/cm²).

Vamos descer mais um degrau: O pé da parte **B** empurra para fora o topo da parte **C** com a componente horizontal **HA+B** de sua carga mais a da parte **A** : 101 kg + 296 kg = 397 kg dividido por tg 30° = 688 kg.

A parte **C** empurra para dentro o pé da parte **B** com a componente horizontal **HC** que vale a carga da parte **C**: 471 kg dividido por tg de 30° = 816 kg, que como no caso anterior é maior que **HA+B**, e comprime o anel com 816 kg - 688 kg = 128 kg.

Vamos descendo os degraus de anel em anel sempre calculando a componente horizontal da soma das cargas de todas as partes que estão acima, e diminuindo da componente horizontal da carga da parte que está embaixo.

Então, o pé da parte **D** empurra para fora com a componente horizontal **HA+B+C+D** da soma das cargas **A+B+C+D**: 101 kg + 296 kg + 471 kg + 614 kg = 1482 kg dividido pela tg 60° = 856 kg.

O topo da parte **E** empurra para dentro o pé da parte **D** com a componente horizontal **HE**, que vale a carga da parte **E**: 715 kg dividido pela tg de 60° = 413 kg.

Agora há uma força resultante (**HA+B+C+D**) - **HE**, que empurra para fora com 856 kg - 413 kg = 443 kg. Esta força está indicada no desenho na parte inferior esquerda vista em planta, estamos indicando só uma delas mas em todas os 12 setores em que dividimos a hemisfério haverá uma força destas, vamos dividi-la em duas componentes **T** que serão realmente as forças que o anel de tração precisa suportar e elas valem metade da força (**HA+B+C+D**) - **HE**: 443 kg/2 ou 221,5 kg dividido pelo seno de 15° = 856 kg.

5- **Dimensionamento**: Os aços usados em construção são os CA (Concreto Armado) e o mais comum é o CA-50 que cada mm² de seção resiste 50 kg. A norma pede que por segurança diminuamos a resistência nominal em 15%, o que significa que o CA-50 deve sofrer um esforço máximo de 43,5 kg à tração (ou compressão). Para resistir os 856 kg precisaremos de : 856 kg / 43,5 kg/mm² = 20 mm² de seção de aço ou seja uma barra com mais de 5,1 mm de diâmetro, ou duas ou mais barras que somadas resultem na mesma seção.

Devemos repetir a mesma operação para dimensionarmos os outros anéis.

Estamos assumindo que a curva entre um anel e outro é uma curva natural, ou seja que a curva natural percorre o terço médio de cada trecho de esfera entre dois anéis.

Se dividirmos em mais partes e em mais setores poderemos ter maior precisão na colocação dos anéis de tração.

Se quisermos evitar todo esse cálculo podemos obter os resultados através de um desenho bem feito e numa escala adequada, é lógico que devemos compensar a imprecisão do desenho com maiores índices de segurança.

Resumo

Em todos os casos que mostramos até agora, procuramos resumir a atuação da estrutura a duas partes uma superior que resiste à compressão e outra inferior que resiste à tração, e essas duas se encontram nos apoios, formando aquilo que denominamos de ciclo estrutural.

Existem forças externas que atuam nesse ciclo estrutural, as mais comuns são as forças peso, mas qualquer agente externo pode estar agindo com forças sobre esse ciclo estrutural.

Para quantificarmos que forças estão agindo internamente no ciclo estrutural, primeiramente precisamos identificar as externas.

Interrompemos o ciclo estrutural no ponto em que queremos quantificar as forças internas. Se for exatamente no apoio esse ponto é único, se for em outro lugar estaremos interrompendo numa mesma linha a parte comprimida e a parte tracionada.

Sabemos que as forças internas tem sua direção exatamente nas tangentes das curvas do ciclo estrutural onde foram interrompidas, e são resultantes da atuação de dois pares de componentes que agem naqueles pontos.

Cada par de componentes é formado de um lado pela resultante das forças externas que chegam àquele ponto, que pode



ter valor zero se as forças externas só caminham por uma das partes do ciclo, e de outro lado por forças que são iguais nas duas partes do ciclo mas com direções opostas.

Como conhecemos o valor das forças externas, basta resolvermos os nas da estrutura, do ciclo

paralelogramos que quantificaremos as forças inter-estrutural.

Em todos estes casos a resultante das forças de tração e de compressão passam exatamente pelo eixo das peças estruturais e as peças trabalham com toda a sua seção resistindo somente tração ou somente compressão.

Nas peças maciças, o ciclo estrutural não aparece tão em evidência, precisaremos então encontrar por onde passam as resultantes das forças de tração e compressão e avaliar que força essas peças podem suportar, é o caso das peças submetidas à flexão.

Flexão

Denomina-se flexão quando uma mesma peça trabalha com tração e compressão ao mesmo tempo, uma das faces estará sendo tracionada enquanto a outra estará sendo comprimida.

A peça isoladamente apresentará um ciclo estrutural. Então nos remetemos mais uma vez aos casos mostrados acima.

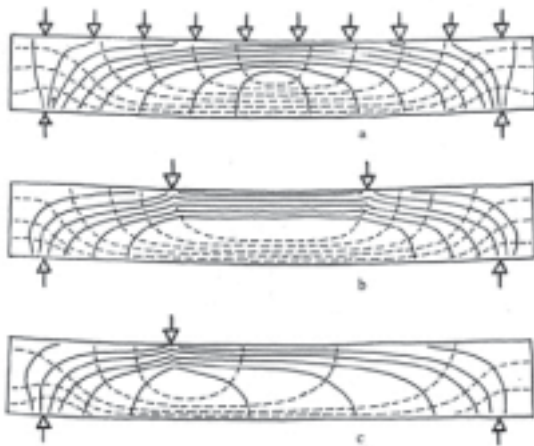
Porém, a tração e a compressão não estarão separadas fisicamente, vai haver uma transição entre um máximo de tração numa face e na outra um máximo de compressão e entre elas um ponto onde não há tração nem compressão. E as resultantes de tração e compressão, não estarão no eixo da peça, mas passarão por caminhos que precisaremos determinar.

O desenho ao lado indica com um sistema de linhas, a nuance entre as forças de tração e compressão.

A curva mais interna, com a abertura para cima representa, como se fosse uma curva de nível, uma região em que há um mínimo de tração e à medida que os arcos vão ficando mais externos vão caminhando para o máximo de tração.

Simetricamente, o arco mais interno com a abertura voltada para baixo indica um nível de mínima compressão e à medida que os arcos crescem, eles representam compressão cada vez maior.

As figuras indicam situações diferentes para três tipos de carregamento diferentes.



Quanto mais próximas as linhas, menos material a peça tem para resistir às forças internas.

No primeiro exemplo claramente a seção mais crítica está no meio do vão, enquanto que no terceiro exemplo, a seção mais crítica está sob a carga.

Examinando um corte da parte central da viga no primeiro exemplo, vamos notar de baixo para cima, um máximo de tração que vai diminuindo à medida que se aproxima do meio da seção onde chega a zero, passando à compressão crescendo até chegar a um máxi-

mo de compressão na parte de cima.

Colocando num gráfico:

Cada quadradinho equivale a uma unidade de área multiplicado por uma unidade de força, então teremos no meio uma unidade de área vezes uma unidade de força (para cima compressão para baixo tração), a seguir uma unidade de área vezes duas unidades de força (curva de nível 2), depois uma unidade de área vezes três unidades de força, e assim por diante, até uma unidade de área vezes 6 de força.

Precisamos localizar as resultantes, pois no final para o cálculo, precisamos saber qual a distância entre a resultante de tração da de compressão.

As resultantes estarão no plano do eixo vertical da viga e dividem exatamente ao meio a quantidade de quadradinhos, então elas distam da metade da viga, a metade dessa altura dividido por raiz quadrada de dois.

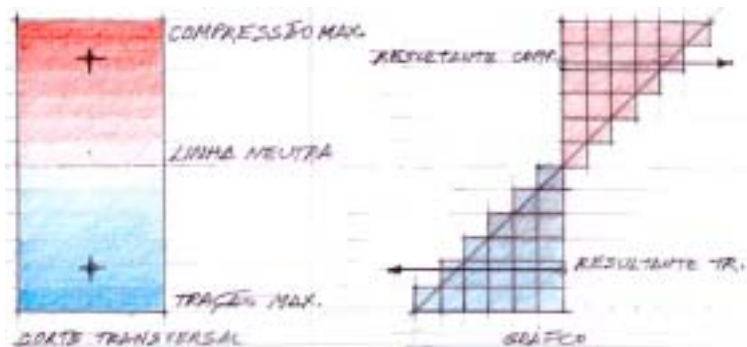
A capacidade que essa viga tem de resistir tração e compressão será reduzida para a metade, pois podemos verificar pelo gráfico que a parte mais externa da viga pode suportar um máximo enquanto que a parte o central não vai suportar nada, vale a média.

Se toda a metade da viga pudesse trabalhar a um máximo de tração ou compressão, sua capacidade seria medida multiplicando-se sua área pela taxa máxima que suporta .

Comparando-se esse resultado com o que ela efetivamente pode suportar mostrado no gráfico, constatamos que uma viga de seção retangular só vai poder ser exigida com a metade da carga máxima.

A viga pode ter outras formas de perfil, o que vai alterar sua capacidade de resistência e a posição das resultantes.

Se a viga tiver o perfil circular, só resistirá a 1/4 da resistência específica nominal, e as resultantes ficarão mais próximas do centro, reduzindo a altura estrutural. No gráfico ao lado foram representadas em cada nível a quantidade de área vezes o nível de tensão (de 1 a 6).



As resultantes dividem números iguais de quadradinhos, então estarão entre os níveis 3 e 4, mais próximas do nível 4, podemos considerar com segurança que as resultantes distam $1/4$ da altura (diâmetro) do centro da viga.

A partir do momento que conseguimos determinar a posição das resultantes e a quantidade de carga máxima que as partes tracionada e comprimida são capazes de suportar, podemos calcular uma viga fletida da mesma maneira que os casos que já vimos anteriormente.

Cálculo de uma viga de madeira

Na figura abaixo está representada uma viga de peroba com a bitola de 6×16 cm, percorrendo um vão de 2,50 m, recebendo uma carga total de 800 kg.

1- Conforme vimos anteriormente o ponto mais crítico está no centro do vão, pois é onde as curvas de nível de força passam mais próximas umas das outras, e as resultantes de tração e de compressão distam a altura da viga dividido por raiz de 2, que será igual a 11,3 cm.

Poderíamos desenhar as duas resultantes como duas parábolas iguais que se encontrariam nos apoios, mas basta desenharmos uma delas considerando a outra como uma reta, o importante é manter a distância da altura estrutural entre elas.

Sabemos que se dobrarmos a altura estrutural e ligarmos com os apoios, estaremos desenhando as tangentes à parábola da resultante de tração. Obtemos então um triângulo de medidas formado pela metade do vão, pelo dobro da altura estrutural e pela tangente.

2- Representamos a metade da carga ou seja 400 kg num dos apoios e representamos o paralelogramo de forças, aparecendo então a força T na tangente à parábola e a força H, que é a força horizontal que a força T gera no apoio.

3- Comparamos esses dois triângulos que são semelhantes.

$P/2$ está para o dobro da altura estrutural assim como H está para a metade do vão, ou seja $H =$

$$400 \text{ kg} \cdot 1,25 \text{ m} / 0,226 \text{ m} = 2213 \text{ kg}.$$

4- Como vimos anteriormente a seção retangular na parte comprimida e na parte tracionada só aguentam a metade da carga nominal que é de 100 kg

/ cm^2 para a peroba, portanto a viga resiste na seção tracionada ou na comprimida (6×8 cm) 48 cm^2 vezes 50 kg ou seja 2400 kg, como este valor supera o solicitado, a viga suportará a carga de 800 kg pelo vão de 2,50 m.

